第15卷 第1期 空间科学学报 Vol. 15, No. 1
1995 年 1 月 CHINESE JOURNAL OF SPACE SCIENCE Jan., 1995

万有引力场中充液卫星的姿态稳定性*

刘延柱 成功
(上海交通大学工程力学系，200030)

摘 要

本文讨论沿圆轨道运动受万有引力矩作用的非对称充液卫星相对轨道坐标系的姿态稳定性. 利用 Liapunov 直接方法和一次近似理论导出相对平衡的稳定性充分必要条件.

关键词 姿态稳定性，充液系统动力学，里亚普诺夫直接法

一、引 言

受万有引力矩作用的刚体卫星的姿态稳定性问题已被充分讨论. Debra 和 Delp[1] 讨论了非对称刚体卫星在轨道坐标系内相对平衡的稳定性. 在标志质量几何的参数平面内划分的 Lagrange 区和 Debra-Delp 区稳定域已成为姿态动力学经典理论的重要部分[4]. 当刚体卫星带有全充液腔时，Kolesnikov[2,3] 证明了刚体卫星的稳定性充分条件仍然适用. 本文讨论沿圆轨道运动受万有引力矩作用的带有全充液体的非对称椭球腔的非对称卫星相对轨道坐标系的平衡稳定性. 利用椭球腔内液体的均匀涡旋运动特点，将涡量作为离散化变量. 忽略卫星姿态运动与轨道运动的耦合，利用 Liapunov 直接法简洁地导出与刚体卫星相同的稳定性充分条件. 利用一次近似理论，以 Helmholtz 方程描述液体的流动，证明此条件同时也是稳定性必要条件.

二、相对平衡的稳定性充分条件

讨论万有引力场内沿圆轨道运动的带有全充液体的非对称卫星的姿态运动. 以星体质心 O 为原点建立星体和椭球腔的主轴坐标系 $(O\text{-}x_1x_2x_3)$ 和轨道坐标系 $(O\text{-}XYZ)$，其中 X 轴沿地心 O_c 至 O 的矢径、Z 轴沿轨道平面法线. 液体在椭球腔内的流动为均匀涡旋运动. 系统的未扰运动为刚体连同腔内液体作与轨道坐标系同步的稳态转动，刚体角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和液体的涡量 $\boldsymbol{\Omega}$ 均与轨道角速度 $\boldsymbol{\omega}_c$ 相等. 定义 $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_c$ 和 $\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}$ 为刚体相对轨道坐标系的相对角速度和液体相对刚体的相对涡量. $\boldsymbol{\omega}'$ 和 $\boldsymbol{\Omega}'$ 沿 x_i 轴的投影 ω_i'、$\Omega_i'(i = 1,2,3)$ 和 X、Z 轴相对 x_i 轴的方向余弦 α_i 和 $\gamma_i(i = 1,2,3)$ 为

* 国家自然科学基金及博士点专项科研基金资助项目.
本文于 1994 年 1 月 14 日收到.

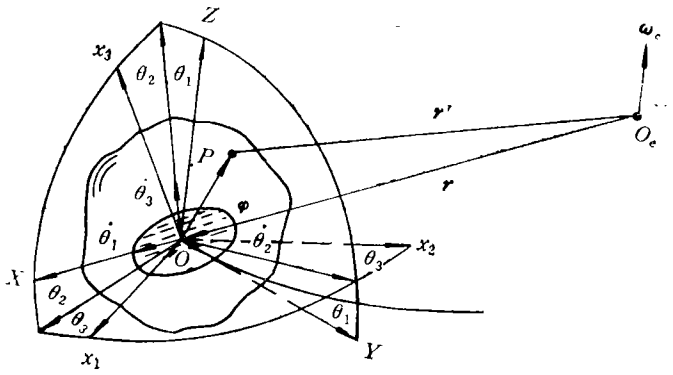


图 1 万有引力场中的充液卫星

Fig. 1 Liquid-filled satellite in gravitational field

系统的离散化变量。卫星的未扰运动对应于

$$\begin{aligned} &\omega_i' = \Omega_i' = 0 \quad (i = 1,2,3), \\ &\alpha_2 = \alpha_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \ \alpha_1 = \gamma_3 = 1. \end{aligned} \tag{1}$$

设 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 为质心 O 和星体中任意点 P 相对地心 O_c 的矢径，$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$ 为 P 相对 O 的矢径(见图 1)。P 点的速度 $\boldsymbol{v}$ 在刚体和液体空间 V_B 和 V_L 内有不同的分布规律:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{\rho}, \qquad (P \in V_B); \\ &\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{u}, \ (P \in V_L). \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 为 P 点处液体的相对流速，是涡量为 $\boldsymbol{\Omega}'$ 的有旋流动与势流的叠加，

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Omega}' \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Delta}\varphi, \tag{3}$$

速度势 φ 可用 Stokes-Zhukovsky 势函数 $\boldsymbol{\phi}$ 表示，$\boldsymbol{\phi}$ 由腔的几何形状单独确定，

$$\varphi = -\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\Omega}'. \tag{4}$$

利用式(2)、(3)、(4)计算刚液系统的动能 T，由广义速度的零次、一次和二次齐次项 T_0、T_1 和 T_2 组成，

$$T = \frac{1}{2} \iiint_{V_B \cup V_L} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}m = T_0 + T_1 + T_2. \tag{5}$$

设 $\mathbf{J}_B$、$\mathbf{J}_L$ 为刚体和液体部分相对 O 点的惯量张量，$\mathbf{J}^*$ 为液体的等效刚体惯量张量，令 $\mathbf{J}' = \mathbf{J}_L - \mathbf{J}^*$，$\mathbf{J}_* = \mathbf{J}_B + \mathbf{J}^*$，$A_i$、$A_i^*$、$A_i'$ 和 $A_{*i}(i = 1,2,3)$ 分别为 $\mathbf{J}$、$\mathbf{J}^*$、$\mathbf{J}'$ 和 $\mathbf{J}_*$ 相对 $(O\text{-}x_1x_2x_3)$ 的主分量，其中

$$A_1^* = \frac{m_L b_2^2 b_3^2}{5(b_2^2 + b_3^2)}, \quad A_2^* = \frac{m_L b_3^2 b_1^2}{5(b_3^2 + b_1^2)}, \quad A_3^* = \frac{m_L b_1^2 b_2^2}{5(b_1^2 + b_2^2)};$$

m_L、$b_i(i = 1,2,3)$ 为液体质量和椭球腔的半轴。将式(5)展开后，令 m 为系统的总质量，T_0 和 T_2 整理为

$$T_0 = \frac{1}{2} \omega_c^2 \left(mr^2 + \sum_{i=1}^{3} A_i \gamma_i^2 \right),$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} [A_i'(\omega_i' + \Omega_i')^2 + A_{*i}\omega_i'^2].$$

设 μ 为地球的万有引力参数，星体的万有引力场力函数 U 为

$$U=\frac{\mu}{r}\left(m+\frac{1}{2r^2}\sum_{i=1}^{3}A_i-\frac{3}{2r^2}\sum_{i=1}^{3}A_i\alpha_i^2\right).$$

将系统的 Hamilton 函数作为 Liapunov 函数 $V=T_2+V^*$，$V^*=-U-T_0$，略去常数项后导出

$$V^*=\frac{3}{2}\omega_c^2[(A_2-A_1)\alpha_2^2+(A_3-A_1)\alpha_3^2]$$
$$+\frac{1}{2}\omega_c^2[(A_3-A_1)\gamma_1^2+(A_3-A_2)\gamma_2^2].$$

系统的动能和势能均不显含时间 t，存在 Jacobi 积分，V 恒为常值．相对平衡状态(1)的稳定性取决于 V 的定号性．由于 T_2 正定，V^* 的正定性条件即刚体卫星的相对平衡稳定性条件：

$$A_1<A_2<A_3, \tag{6}$$

从而证明，此条件同时也是全充液卫星相对平衡的稳定性充分条件．若考虑腔内液体的粘性，则 $\dot{V}<0$，此条件保证充液卫星的相对平衡为渐近稳定．

三、相对平衡的稳定性必要条件

将 $(O\text{-}x_1x_2x_3)$ 相对 $(O\text{-}XYZ)$ 的姿态以 Cardan 角 $\vartheta_i(i=1,2,3)$ 表示(见图 1)，只保留其一次项．令 $\boldsymbol{e}_i(i=1,2,3)$ 为 x_i 轴的基矢量，则刚体角速度 $\boldsymbol{\omega}$、系统相对 O 点的动量矩 $\boldsymbol{H}$ 和万有引力矩 $\boldsymbol{M}$ 分别为

$$\boldsymbol{\omega}=(\dot{\vartheta}_1-\omega_c\vartheta_2)\boldsymbol{e}_1+(\dot{\vartheta}_2+\omega_c\vartheta_1)\boldsymbol{e}_2+(\dot{\vartheta}_3+\omega_c)\boldsymbol{e}_3; \tag{7}$$

$$\boldsymbol{H}=\sum_{i=1}^{3}(A_i\omega_i+A_i'\Omega_i')\boldsymbol{e}_i; \tag{8}$$

$$\boldsymbol{M}=3\omega_c^2[(A_1-A_3)\vartheta_2\boldsymbol{e}_2+(A_1-A_2)\vartheta_3\boldsymbol{e}_3]. \tag{9}$$

利用上式列出系统的线性化的 Euler 方程和液体流动的 Helmholtz 方程．其沿 x_3 轴的投影式消去 Ω_3' 后化作

$$A_{*3}\ddot{\vartheta}_3+3\omega_c^2(A_2-A_1)\vartheta_3=0, \tag{10}$$

此方程单独确定 ϑ_3，其零解稳定性条件 $A_2>A_1$ 与条件(6)一致．沿 x_1、x_2 轴的投影式为

$$A_1\ddot{\vartheta}_1-(A_1+A_2-A_3)\omega_c\dot{\vartheta}_2+(A_3-A_2)\omega_c^2\vartheta_1+A_1'\dot{\Omega}_1'-A_2'\omega_c\Omega_2'=0, \tag{11a}$$
$$A_2\ddot{\vartheta}_2+(A_1+A_2-A_3)\omega_c\dot{\vartheta}_1+4(A_3-A_1)\omega_c^2\vartheta_2+A_2'\dot{\Omega}_2'+A_1'\omega_c\Omega_1'=0, \tag{11b}$$
$$\ddot{\vartheta}_1-\omega_c\dot{\vartheta}_2+\dot{\Omega}_1'+(\Gamma_1-1)\omega_c\Omega_2'=0, \tag{11c}$$
$$\ddot{\vartheta}_2+\omega_c\dot{\vartheta}_1+\dot{\Omega}_2'-(\Gamma_2-1)\omega_c\Omega_1'=0. \tag{11d}$$

无量纲参数 Γ_1、Γ_2 定义为

$$\Gamma_1=\frac{b_3^2-b_1^2}{b_3^2+b_1^2},\quad \Gamma_2=\frac{b_3^2-b_2^2}{b_3^2+b_2^2}.$$

系统(11)的特征方程可整理为

$$\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^6+a_1\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^4+a_2\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2+a_3=0. \tag{12}$$

各系数定义为

$$\begin{aligned}a_1 &= \{(\lambda-1)[\lambda-\beta-2\gamma+3(1+\delta)]+(\beta-\delta)(1-2\gamma)+\gamma\\&\quad+\lambda[\gamma(\Gamma_1-1)+\delta(\Gamma_2-1)]\\&\quad+\beta(\Gamma_1-1)(\Gamma_2-1)\}(1-\gamma)^{-1}(\beta-\delta)^{-1},\\a_2 &= \{(\lambda-\beta+\delta)[4(\lambda-1)+\gamma]+(4\lambda-3)[\gamma(\Gamma_1-1)+\delta(\Gamma_2-1)]\\&\quad+[4\lambda-3+(\lambda-2)(\lambda-\beta)](\Gamma_1-1)(\Gamma_2-1)\}(1-\gamma)^{-1}(\beta-\delta)^{-1},\\a_3 &= 4(\lambda-1)(\lambda-\beta)(\Gamma_1-1)(\Gamma_2-1)(1-\gamma)^{-1}(\beta-\delta)^{-1}.\end{aligned}$$

其中 $\lambda=A_3/A_1$, $\beta=A_2/A_1$, $\gamma=A_1'/A_1$, $\delta=A_2'/A_1$. 方程(12)的全部特征根为纯虚根的必要条件为(证明见附录)

$$\begin{aligned}&a_i>0(i=1,2,3),a_1^2-3a_2>0,\\&a_1a_2-9a_3>0,\\&(a_1^2-3a_2)(a_1a_2-9a_3)^2\\&\quad-(a_1^2a_2+9a_1a_3-6a_2^2)>0.\end{aligned}\tag{13}$$

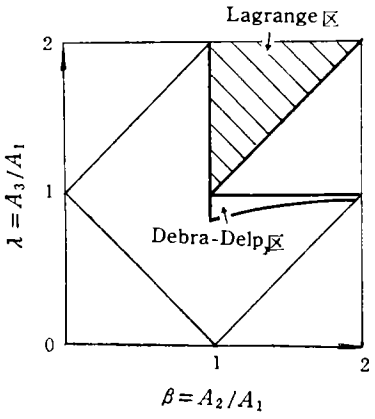


图 2 参数平面内的稳定域

Fig. 2 Stable region on parameter plane

数值计算表明,随着卫星充液量的增大,(β, λ)参数平面内的 Debra-Delp 稳定区逐渐缩小乃至消失,只有与条件(6)对应的 Lagrange 稳定区仍继续存在(见图 2). 从而证明,除边界情况不能确定以外,Lagrange 三角形开域也满足稳定性的必要条件. 利用 Pfeiffer 近似理论[5],将腔内液体的涡量以平均涡量代替,上述结论可推广到非椭球形轴对称腔情形.

附 录

实系数 3 次代数方程 $f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 的根为不等负实根必要条件的证明: 设 x_1、x_2、x_3 为方程的不等负实根, $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$, 且 $x_1<x_2<x_3<0$. $\exists\xi_1\in(x_1,x_2)$. $\xi_2\in(x_2,x_3)$ 使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$, 且 $x_1<\xi_1<x_2<\xi_2<x_3<0$. $\because f(+\infty)>0$, $f(-\infty)<0$, $\therefore f(0)>0$, $f(\xi_1)>0$, $f(\xi_2)<0$. 方程 $f'(x)=3x^2+2a_1x+a_2=0$ 有 2 个不等实根的条件为 $a_1^2-3a_2>0$, 解出 $\xi_{1,2}=(-a_1\mp\sqrt{a_1^2-3a_2})/3$. $\xi_1<\xi_2<0$ 要求 $a_1>0$, $a_2>0$. $f(0)>0$ 要求 $a_3>0$. $f(\xi_1)>0$, $f(\xi_2)<0$ 要求 $a_1a_2-9a_3>0$, $(a_1^2-3a_2)(a_1a_2-9a_3)^2-(a_1^2a_2+9a_1a_3-6a_2^2)^2>0$. 条件(13)证毕.

参 考 文 献

[1] Debra, D. B. and Delp, B. H., *J. of Astronautical Science*, Vol. **8**, p. 14, 1961.
[2] Колесников, Н. Н., *ПММ*, Т. **26**, стр. 914, 1962.
[3] Moiseyev, N. N. and Rumyantsev, V. V., Dynamic Stability of Bodies Containing Fluid, Springer-Verlag, p. 103, 1968.
[4] Hughes, P. C., Spacecraft Altitude Dynamics, John Wiley & Sons, p. 297, 1985.
[5] Pfeiffer, F., *Ingenieur Archiv*, Vol. **43**, p. 306, 1974.

ATTITUDE STABILITY OF LIQUID-FILLED SATELLITE IN GRAVITATIONAL FIELD

Liu Yan-zhu　　Cheng gong

(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, 200030)

Abstract

The attitude stability of an asymmetrical liquid-filled satellite relative the orbital coordinate system in a circular orbit under application of the gravitational torque is discussed in present paper. A sufficient and necessary condition of stability of relative equilibrium is obtained by use of the Liapunov's direct method and the first-approximation theory.

Key words Attitude stability, Dynamics of liquid-filled system, Liapunov's direct method