有限外磁场中的空心圆柱等离子体波导*

胡斌杰 张国基 赖声礼
(华南理工大学电子与通信工程系 广州 510641)

摘 要

分析了外磁场中电磁波沿空心圆柱等离子体波导的传播特性. 首先给出边界条件的矩阵方程, 利用矩阵的有关性质导出了问题的特征方程, 采用精确求解特征方程的数值法, 分析了波导传播常数随等离子体厚度、电子密度、碰撞频率和外加磁场的变化规律.

关键词 等离子体波导—各向异性媒质—传播特性

1 引 言

近年来, 由于等离子体波导在许多方面有着巨大的应用潜力而日益引起人们的兴趣. 它不仅可用来传输电磁能量, 而且是许多等离子体电子仪器的必备部件之一. 就等离子体作为介质而言, 它的等效介电常数不仅与电磁波的工作频率有关, 而且还与外磁场的大小和方向有关. 等离子体的这个性质无疑增加了理论分析上的难度. 但正是由于它的这个性质, 使得等离子体波导具有许多其它波导不具有的性质. 而这些特性的充分利用又依赖于人们对等离子体波导本征模的全面深入了解的程度. 文献 [1, 2] 提出了在大气中用空心激光束电离气体分子的原子, 利用其产生的等离子体通导作为一种导波系统来进行空间中点对点能量传输的设想, 并在无外磁场和忽略碰撞的情况下数值模拟了这种波导的传播特性. 研究表明 [3], 即便是在等离子体厚度假设为无限大的简化模型中, 地磁场对波导传播性能的影响仍然不能被忽略.

本文进一步研究等离子体厚度为有限值时地磁场和等离子体有效碰撞频率对波导传播性能的影响. 与常规的研究方法不同, 本文利用边界条件的矩阵方程, 通过适当的矩阵求逆和内积来推导的特征方程. 由于这里只涉及 4×4 矩阵的求逆和内积, 故文内所用方法很容易推广到径向不均匀电各向异性媒质 (或磁各向异性媒质) 介质波导本征问题的研究当中.

2 特征方程

当存在轴向的外加磁场 B_0 时, 等离子体的介电常数张量为 [4,5]

* 中国博士后科学基金 1999-10, 广东省自然科学基金 990887 资助项目
1999-07-09 收到原稿, 2000-02-01 收到修定稿

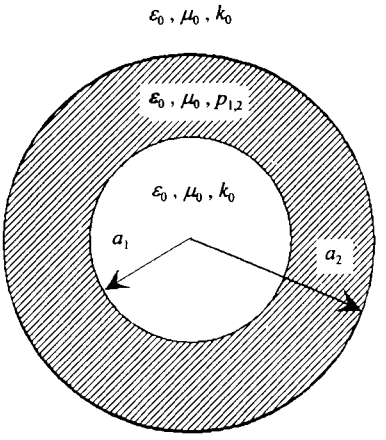

图 1 有限磁场中的空心圆柱等离子体波导截面图 (厚度因子 $\alpha = a_2/a_1$)

Fig.1 Cross section of circular hollow plasma waveguide in finite magnetic field

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & 0 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\xi^2(1-\mathrm{i}\delta)}{(1-\mathrm{i}\delta)^2 - \tau^2},$$
$$\varepsilon_2 = \mathrm{i}\frac{\tau\xi^2}{(1-\mathrm{i}\delta)^2 - \tau^2} = -\mathrm{i}\varepsilon_g, \tag{2}$$
$$\varepsilon_3 = 1 - \frac{\xi^2}{1-\mathrm{i}\delta},$$

$$\xi = \frac{\omega_\mathrm{p}}{\omega}, \quad \tau = \frac{\omega_\mathrm{c}}{\omega}, \quad \delta = \frac{\nu}{\omega}, \tag{3}$$

这里 $\omega_\mathrm{p} = (Ne^2/m\varepsilon_0)^{1/2}$ 为等离子体频率, $\omega_\mathrm{c} = eB_0/m$ 为电子回旋频率. ν 为碰撞频率.

从公式 (1) 可以看出, 等离子体介电常数张量的非对角元素不全为 0. 这意味着电场和磁场的纵向分量 E_z 和 H_z 不再满足齐次的波动方程, 而是满足耦合的波动方程, 其解可以通过算子的分解得到 [5].

$$E_z = B_1^{(1)}J_n(p_1r) + B_1^{(2)}H_n(p_1r) + B_2^{(1)}J_n(p_2r) + B_2^{(2)}H_n(p_2r), \tag{4}$$

$$H_z = B_1^{(1)}h_1J_n(p_1r) + B_1^{(2)}h_1H_n(p_1r) + B_2^{(1)}h_2J_n(p_2r) + B_2^{(2)}h_2H_n(p_2r), \tag{5}$$

式中

$$p_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\{(c^e + c^\mu) \pm [(c^e + c^\mu)^2 - 4(c^ec^\mu - b^eb^\mu)]^{1/2}\}, \tag{6}$$

$$h_{1,2} = \frac{1}{b^\mu}(c^e - p_{1,2}^2), \tag{7}$$

$$b^e = \gamma\omega\varepsilon_0\varepsilon_2\varepsilon_3/\varepsilon_1,\ b^\mu = -\gamma\omega\mu_0\varepsilon_2/\varepsilon_1,\ c^e = (k_0^2\varepsilon_1 - \gamma^2)\varepsilon_3/\varepsilon_1,$$

$$c^\mu = k_0^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)/\varepsilon_1 - \gamma^2, \quad k_0^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0, \tag{8}$$

J_n 和 $H_n(= H_n^{(2)})$ 分别为贝塞尔函数和汉克函数, 因子 $\exp(-\mathrm{i}\gamma z + \mathrm{i}n\theta)$ 在 (4) 和 (5) 式中省略.

等离子体外场的纵向分量的一般解为

$$E_z = C_1J_n(p_0r)e^{-\mathrm{i}\gamma z + \mathrm{i}n\theta}, \quad H_z = C_2J_n(p_0r)e^{-\mathrm{i}\gamma z + \mathrm{i}n\theta}, \quad r < a_1, \tag{9}$$

$$E_z = D_1H_n(p_0r)e^{-\mathrm{i}\gamma z + \mathrm{i}n\theta}, \quad H_z = D_2H_n(p_0r)e^{-\mathrm{i}\gamma z + \mathrm{i}n\theta}, \quad a_2 < r, \tag{10}$$

式中

$$p_0^2 = k_0^2 - \gamma^2. \tag{11}$$

在边界 $r = a_1$ 和 $r = a_2$ 上场的切向分量应保持连续, 由此可得到用矩阵表示的边界

方程.

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}} \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{b1}} \cdot \boldsymbol{B} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{b2}} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{d}} \cdot \boldsymbol{D} \tag{13}$$

(12) 和 (13) 式中各矢量和矩阵定义如下：

$$\boldsymbol{C} = [C_1\ C_2\ 0\ 0]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{D} = [D_1\ D_2\ 0\ 0]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{B} = [B_1^{(1)}\ B_1^{(2)}\ B_2^{(1)}\ B_2^{(2)}]^{\mathrm{T}}, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} J_n(x_{01}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_n(x_{01}) & 0 & 0 \\ \dfrac{n\gamma}{p_0^2} J_n(x_{01}) & \dfrac{\mathrm{i}\omega\mu_0}{p_0^2} x_{01} J_n'(x_{01}) & 0 & 0 \\ \dfrac{-\mathrm{i}\omega\varepsilon_0}{p_0^2} x_{01} J_n'(x_{01}) & \dfrac{n\gamma}{p_0^2} J_n(x_{01}) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} H_n(x_{02}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_n(x_{02}) & 0 & 0 \\ \dfrac{n\gamma}{p_0^2} H_n(x_{02}) & \dfrac{\mathrm{i}\omega\mu_0}{p_0^2} x_{02} H_n'(x_{02}) & 0 & 0 \\ \dfrac{-\mathrm{i}\omega\varepsilon_0}{p_0^2} x_{02} H_n'(x_{02}) & \dfrac{n\gamma}{p_0^2} H_n(x_{02}) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{b1}} = \begin{bmatrix} M_{\mathrm{b1}}^{(1)} & M_{\mathrm{b1}}^{(2)} \\ M_{\mathrm{b1}}^{(3)} & M_{\mathrm{b1}}^{(4)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_{\mathrm{b2}} = \begin{bmatrix} M_{\mathrm{b2}}^{(1)} & M_{\mathrm{b2}}^{(2)} \\ M_{\mathrm{b2}}^{(3)} & M_{\mathrm{b2}}^{(4)} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{b}j}^{(1)} = \begin{bmatrix} J_n(x_j^{(1)}) & H_n(x_j^{(1)}) \\ h_1 J_n(x_j^{(1)}) & h_1 H_n(x_j^{(1)}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_{\mathrm{b}j}^{(2)} = \begin{bmatrix} J_n(x_j^{(2)}) & H_n(x_j^{(2)}) \\ h_2 J_n(x_j^{(2)}) & h_2 H_n(x_j^{(2)}) \end{bmatrix}, \quad (j = 1, 2), \tag{18}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{b}j}^{(3)} = \begin{bmatrix} f_1^e x_j^{(1)} J_n'(x_j^{(1)}) + n g_1^e J_n(x_j^{(1)}) & f_1^e x_j^{(1)} H_n'(x_j^{(1)}) + n g_1^e H_n(x_j^{(1)}) \\ f_1^\mu x_j^{(1)} J_n'(x_j^{(1)}) + n g_1^\mu J_n(x_j^{(1)}) & f_1^\mu x_j^{(1)} H_n'(x_j^{(1)}) + n g_1^\mu H_n(x_j^{(1)}) \end{bmatrix}, \quad (j = 1, 2), \tag{19}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{b}j}^{(4)} = \begin{bmatrix} f_2^e x_j^{(2)} J_n'(x_j^{(2)}) + n g_2^e J_n(x_j^{(2)}) & f_2^e x_j^{(2)} H_n'(x_j^{(2)}) + n g_2^e H_n(x_j^{(2)}) \\ f_2^\mu x_j^{(2)} J_n'(x_j^{(2)}) + n g_2^\mu J_n(x_j^{(2)}) & f_2^\mu x_j^{(2)} H_n'(x_j^{(2)}) + n g_2^\mu H_n(x_j^{(2)}) \end{bmatrix}, \quad (j = 1, 2), \tag{20}$$

式中

$$\begin{aligned} &f_j^e = (A_1^e + \mathrm{i}A_3^e h_j)/\Delta, \quad g_j^e = (A_0 + \mathrm{i}A_2^e h_j)/\Delta, \\ &f_j^\mu = (-\mathrm{i}A_2^\mu + A_3^\mu h_j)/\Delta, \quad g_j^\mu = (\mathrm{i}A_1^\mu + A_0 h_j)/\Delta, \\ &x_j^{(1)} = p_1 a_j, \quad x_j^{(2)} = p_2 a_j, \quad x_{0j} = p_0 a_j, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} &A_1^e = \gamma k_0^2 \varepsilon_g, \quad A_2^e = \omega\mu_0 k_0^2 \varepsilon_g, \quad A_3^e = \omega\mu_0 (k_0^2 \varepsilon_1 - \gamma^2), \\ &A_1^\mu = -\gamma^2 \omega\varepsilon_0 \varepsilon_g, \quad A_2^\mu = \omega\varepsilon_0 [k_0^2(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_g^2) - \gamma^2 \varepsilon_1], \quad A_3^\mu = \gamma k_0^2 \varepsilon_g, \\ &A_0 = \gamma(k_0^2 \varepsilon_1 - \gamma^2), \quad \Delta = [k_0^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_g) - \gamma^2][k_0^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_g) - \gamma^2], \end{aligned} \tag{22}$$

从公式 (12) 和 (13) 中消去矢量 $\boldsymbol{B}$, 于是有:

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}} \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{D}, \tag{23}$$

式中

$$\boldsymbol{M} = [m_{ij}] = \boldsymbol{M}_{\mathrm{b1}} \cdot \boldsymbol{M}_{\mathrm{b2}}^{-1} \cdot \boldsymbol{M}_{\mathrm{d}}. \tag{24}$$

由公式 (16) 可知矩阵 $\boldsymbol{M}_d$ 的最后两列的元素均为 0, 因此矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的最后两列也必为 0, 于是公式 (23) 可变形为

$$\begin{bmatrix} J_n(x_{01}) & 0 & -m_{11} & -m_{12} \\ 0 & J_n(x_{01}) & -m_{21} & -m_{22} \\ \dfrac{n\gamma}{p_0^2} J_n(x_{01}) & \dfrac{\mathrm{i}\omega\mu_0}{p_0^2} x_{01} J_n'(x_{01}) & -m_{31} & -m_{32} \\ \dfrac{-\mathrm{i}\omega\varepsilon_0}{p_0^2} x_{01} J_n'(x_{01}) & \dfrac{n\gamma}{p_0^2} J_n(x_{01}) & -m_{41} & -m_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = 0. \tag{25}$$

为了保证得到场的非零解, 方程 (25) 所对应的系数行列式应为 0, 于是得到本问题所满足的特征方程

$$\begin{vmatrix} J_n(x_{01}) & 0 & -m_{11} & -m_{12} \\ 0 & J_n(x_{01}) & -m_{21} & -m_{22} \\ \dfrac{n\gamma}{p_0^2} J_n(x_{01}) & \dfrac{\mathrm{i}\omega\mu_0}{p_0^2} x_{01} J_n'(x_{01}) & -m_{31} & -m_{32} \\ \dfrac{-\mathrm{i}\omega\varepsilon_0}{p_0^2} x_0 J_n'(x_{01}) & \dfrac{n\gamma}{p_0^2} J_n(x_{01}) & -m_{41} & -m_{42} \end{vmatrix} = 0. \tag{26}$$

从上面的讨论可以看出, 将边界条件写成矩阵形式的好处是显而易见的. 这样就可以充分利用矩阵的消元技术, 将有关表示等离子体内、外纵向场表达式中的系数 $B_1^{(1,2)}$ 、$B_2^{(1,2)}$ 、 $C_{1,2}$ 和 $D_{1,2}$ 的 8 个代数方程简化成只含有等离子体外纵向场表达式中的系数 $C_{1,2}$ 和 $D_{1,2}$ 的 4 个代数方程. 这个思想对于处理等离子体径向不均匀性是非常有效的. 因为对于径向不均匀的等离子体波导, 我们可以将其沿径向分成 N 层, 在每一层内假定等离子体的介电常数张量为一固定值, 但所有层中介电常数的剖面满足实际的非均匀分布. 在每个交界面上匹配边界条件就可得 $N+1$ 个矩阵方程, 通过与上面类似的消元过程, 就可将原来的 $4(N+1)$ 个代数方程依然转化成 4 个只含有等离子体外纵向场表达式中的系数的代数方程. 这样不均匀问题中所得到的特征方程在形式上也与方程 (26) 类似, 不同之处仅在于矩阵元素 m_{ij} 的计算上. 这个特点对于计算机模拟非均匀问题是非常方便的.

3 数值计算与讨论

方程 (26) 是一个用超越函数表示的复数方程, 一般只能用数值的方法进行求解. 常用的求解法就是寻根技术. 著名的求根法应当属于 Newton-Raphson 法. 这种方法的前提是能够导出待求函数的导数, 且其计算的精度过分依懒于初始点的选取. 这里我们采用的是 Muller 法, 它可以克服 Newton-Raphson 的上述不足. 计算机模拟时的有关参数均来自于文献 [4].

图 2 给出了波导本征模衰减随等离子体厚度因子的变化规律，图 2 中取等离子体中电子密度为 $1\times10^{11}\,\mathrm{m}^{-3}$, 碰撞频率为 0, 外磁场强度分别为 0.3 和 0.4 Oe, $a_1/\lambda=100$. 由图 2 可以看出，波导衰减常数随等离子体厚度的变化规律与本征值虚部随等离子体厚度的变化规律在曲线的形态上基本一致，这说明波导本征模的衰减规律主要取决于对应本征值虚部的变化规律. 产生这种现象的原因主要是由于本征值实部变化很小的原故.

图 3 给出波导衰减与碰撞频率的变化情况. 其等离子体中电子密度为 $1\times10^{11}\,\mathrm{m}^{-3}$, 等离子体厚度因子取 3.5, 外磁场强度为 0.5 Oe. 图中可以看出，尽管等离子体中的有效碰撞频率远远小于电磁波的工作频率，但其对波导的衰减仍有一定的影响. 这与无外磁场情况下不同. 无外磁场存在情况下，有效碰撞频率对波导衰减的影响可以忽略 [2].

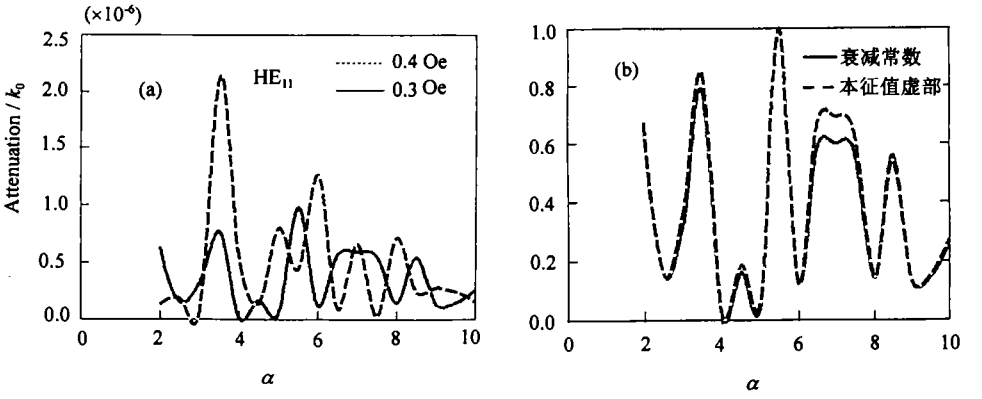

图 2　波导本征模与等离子体厚度因子之间的关系

(a) 波导衰减常数, (b) 归一化衰减常数与归一化本征值虚部

Fig.2　Attenuation and eigenvalue against plasma thickness factor

(a) attenuation constant, (b) normalized attenuation constant and image part of eigenvalue

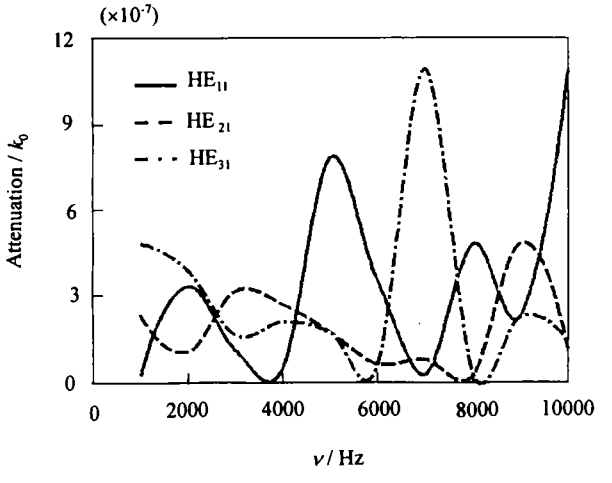

图 3　衰减与碰撞频率之间的关系

Fig.3　Attenuation against collision frequency

4 结 论

本文分析了有限外磁场中，电磁波沿空心圆柱等离子体波的传播特性. 在无外磁场中，波导衰减常数与等离子体厚度因子呈指数衰减关系，且与等离子体中的有效碰撞频率无关[2]. 而在有限外磁场中，波导的衰减不仅与等离子体的厚度有关，而且与外磁场的大小和等离子体中的有效碰撞频率有关. 高频情况 ($\omega \gg \omega_p$) 下，有限外磁场中等离子体波导的衰减常数是外磁场大小、等离子体中有效碰撞频率以及等离子体厚度因子的一个振荡函数. 从减小波导衰减的角度来说，除了足够大的波导内半径外，选择合理的电离层高度和优化的等离子体波导的厚度也是必要的.

参 考 文 献

[1] Shen Haoming. Plasma waveguide: A concept to transfer electromagnetic energy in space. *J. Appl. Phys.*, 1991, **69**(10):6 827—6 835

[2] Shen Haoming, Pao H Y. The plasma waveguide with a finite thickness of cladding. *J. Appl. Phys.*, 1991, **70**(11):6 653—6 662

[3] Hu Binjie, Ruan Chengli. Propagation properties of a plasma waveguide in an external magnetic field. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 1998, **31**:2 151—2 154

[4] 苏哈鲁柯夫等著，王珊编译. 波动理论. 上海：复旦大学出版社， 1995. 72—135

[5] Sferides A D, Kriezis E E. Propagation of electromagnetic waves in a magneto-plasma filled elliptical coaxial line with lossy walls. *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 1983, **11**(2):57—64

CIRCULAR HOLLOW PLASMA WAVEGUIDE IN AN EXTERNAL MAGNETIC FIELD

HU Binjie ZHANG Guoji LAI Shengli

(*Department of Electronic Engineering, South China University of Technology, Guangzhou* 510641)

Abstract

The electromagnetic wave propagating along a circular hollow plasma waveguide immersed in an external magnetic field is presented. Because of the boundary conditions at all interfaces can be represented by the matrix equations, the characteristic equation can be obtained by using the matrix manipulation. The effects of the plasma thickness of cladding, electron cyclotron frequency, and collision frequency on attenuation of the waveguide are investigated.

Key words Plasma waveguide, Anisotropic medium, Propagation characteristic