第21卷 第2期 空 间 科 学 学 报 Vol.21, No.2
2001 年 4 月 CHINESE JOURNAL OF SPACE SCIENCE Apr., 2001

三维球坐标系下重力波波包非线性传播过程的数值研究 *

张绍东 易 帆 熊东辉
(武汉大学无线电科学技术系 430072)

摘 要

采用全隐欧拉 (FICE) 格式, 对三维球坐标系下重力波波包在中层大气的非线性传播过程进行了数值模拟. 模拟结果完整地反映了重力波波包在中层大气的非线性传播过程, 并与线性重力波理论进行了定量比较.

关键词 三维—重力波波包—非线性传播

1 引 言

中层大气是整个日-地系统中的一个重要的组成部分. 雷达观测结果表明, 重力波在中层大气中是最普遍的现象之一. 中层大气中的能量和动量的传输以及输运过程几乎都是伴随着重力波的传播过程进行的. 重力波传播过程的数值研究开始于 20 世纪 80 年代, 随着计算机技术以及空间科学的发展, 数值研究从早期关注最简单、最基本的过程——一维不可压大气中平面单色波传播发展到目前研究比较复杂的二维可压大气中波包的传播过程 [1].

中层大气动力学数值研究的最终目标是建立起实用的数值模型, 使数值结果能提供更多、更全面的信息, 更接近真实大气中的物理过程. 因此目前大气科学家和空间科学家倾向于在三维球坐标系中研究大气的各种动力学特性. 很显然, 达到这一目标, 首先需要建立起球坐标下的三维数值模型. 20 世纪 90 年代以来, 许多学者开始尝试建立三维的数值模式. 最初的数值模式是全线性或部分线性化的, 尽管这些数值模式有些仍在广泛使用, 但有关非线性效应的作用在这些数值模式中是无法反映出来的. 现在比较通行的三维数值方法是 "谱方法"[2], 这种方法实质上是将方程简化为二维方程, 因此, 严格地说谱方法并不是真正意义上的三维模式. 2000 年, 张绍东等 [3] 从球坐标下的三维大气基本运动方程出发, 采用全隐欧拉 (FICE)[4] 格式, 建立起三维球坐标系下重力波波包非线性传播的全非线性的数值模式.

本文是文献 [3] 的工作的一个延续, 文献 [3] 的主要内容在于介绍一种新的三维全球中、高层大气动力学全非线性数值模型. 本文主要目的在于采用文献 [3] 中的数值模式对重力波波包在高纬区中层大气的非线性传播过程进行了数值模拟, 并对模拟结果进行了

* 国家自然科学基金重大项目 (49990450), 国家自然科学基金青年项目 (49904009) 共同资助
2000-10-19 收到原稿, 2001-02-19 收到修定稿

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

详细的物理分析. 模拟结果首次完整地反映了球坐标系下, 重力波波包在真正意义上的三维可压大气中的非线性传播过程.

2 数值模式

2.1 控制方程

本文从球坐标系下的大气基本运动方程出发, 忽略分子黏性, 控制方程有如下形式:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{u}{r\cos\theta}\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} - \frac{v}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r} - w\frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{\rho}{r\cos\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\rho}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \rho\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{2\rho w}{r} + \frac{\rho v}{r}\tan\theta, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{u}{r\cos\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - w\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{\rho r\cos\theta}\frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{uv}{r}\tan\theta - \frac{uw}{r} + 2v\Omega_{\mathrm{e}}\sin\theta - 2w\Omega_{\mathrm{e}}\cos\theta, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{u}{r\cos\theta}\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} - w\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{u^2}{r}\tan\theta - \frac{vw}{r} - 2u\Omega_{\mathrm{e}}\sin\theta, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{u}{r\cos\theta}\frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} - w\frac{\partial w}{\partial r} - g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{u^2+v^2}{r} + 2u\Omega_{\mathrm{e}}\cos\theta, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{u}{r\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial \varphi} - \frac{v}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} - w\frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{RT}{r\cos\theta c_V}\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{RT}{rc_V}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{RT}{c_V}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{vRT}{rc_V}\tan\theta - \frac{2RTw}{rc_V}\tan\theta, \tag{1.5}$$

$$P = R\rho T. \tag{1.6}$$

式中, r 为径向 (垂直) 方向; φ ($0^\circ \leqslant \varphi \leqslant 360^\circ$) 和 θ($-90^\circ \leqslant \varphi \leqslant 90^\circ$) 分别为经度和纬度; u、v、w 分别为纬向、经向、和垂直方向风速; ρ, P, T 分别为密度、压强和温度; R 为普适气体常数 ($R = 286.9821\,\mathrm{N\cdot m/kg\cdot K}$); c_V 为定容比热 ($c_V = 718\,\mathrm{J/kg\cdot K}$); g 为重力加速度 ($g = 9.80225\,\mathrm{m/s^2}$); $\Omega_{\mathrm{e}} = 2.729 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$ 为地球自转角频率.

2.2 初始条件

设初始背景大气为等温、静止大气, 并且满足流体静力学平衡. 即

$$T_0 = T_{\mathrm{c}}, \quad \rho_0 = \rho_{\mathrm{c}}\mathrm{e}^{-\frac{g}{RT_{\mathrm{c}}}r}, \quad P_0 = R\rho_0 T_0, \quad u_0 = 0\,\mathrm{m/s}, \quad v_0 = 0\,\mathrm{m/s}, \quad w_0 = 0\,\mathrm{m/s}.$$

式中, $T_{\mathrm{c}} = 288.221\,\mathrm{K}$ 和 $\rho_{\mathrm{c}} = 1.29\,\mathrm{kg/m^3}$ 为常数.

初始时刻, 在流体静力学平衡大气中加上一个向上传播的高斯型重力波波包扰动作为初始扰动, 其纬向扰动速度具有如下形式:

$$u'(r,\varphi,\theta,0) = u_{\mathrm{c}}\mathrm{e}^{-\frac{(r-r_{\mathrm{c}})^2}{2\sigma_r^2}}\mathrm{e}^{-\frac{r_{\mathrm{c}}^2(\theta-\theta_{\mathrm{c}})^2}{2\sigma_\theta^2}}\mathrm{e}^{-\frac{r_{\mathrm{c}}^2\cdot\cos^2\theta_{\mathrm{c}}(\varphi-\varphi_{\mathrm{c}})^2}{2\sigma_\varphi^2}} \cdot\cos[k_r(r-r_{\mathrm{c}}) + k_\theta r_{\mathrm{c}}(\theta-\theta_{\mathrm{c}}) + k_\varphi r_{\mathrm{c}}\cos\theta_{\mathrm{c}}(\varphi-\varphi_{\mathrm{c}})], \tag{2}$$

式中 u_{c} 为初始扰动振幅, 在本文中 $u_{\mathrm{c}} = 3\,\mathrm{m/s}$; $r_{\mathrm{c}} = R_{\mathrm{e}} + h$, $R_{\mathrm{e}} = 6\,370\,\mathrm{km}$ 为地球平均半径, h 为初始时刻波包中心位置的高度, 取 $h = 60\,\mathrm{km}$; φ_{c} 和 θ_{c} 为常数, 分别取为 180° 和 60°; k_r、k_φ、k_θ 分别为重力波的垂直、经向和纬向波数, 垂直 (λ_r)、经向 (λ_φ) 和纬

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

向 (λ_θ) 波长分别取为 15 km、2 000 km 和 800 km; σ_r、σ_φ 和 σ_θ 为波包在三个方向上的半宽度，本文中取为 $\sigma_r = \lambda_r$、$\sigma_\kappa = \lambda_\varphi$ 和 $\sigma_\theta = \lambda_\theta$. 其他物理量的初始扰动 ($v'(r,\varphi,\theta,0)$, $w'(r,\varphi,\theta,0)$, $\rho'(r,\varphi,\theta,0)$, $T'(r,\varphi,\theta,0)$, $P'(r,\varphi,\theta,0)$) 由重力波的线性偏振关系求出. 将这些物理量的初始扰动和初始背景值一并作为初值进行数值计算.

2.3　数值计算方法

我们的数值计算主要是研究重力波波包的传播过程，对于中尺度和大尺度重力波，传播过程是一个慢变过程. 要实现这种数值模拟，要求差分算法具有实际精度高，长期计算稳定，结果可靠性好的特点. 为此，本文中的数值模拟采用 FICE[4] 格式. 关于三维球坐标系下的 FICE 格式的求解方法以及边界条件的确定在文献 [3] 中已有详细介绍，这里我们只给出计算区域和空间步长. 纬向方向上，取 $0° < \varphi < 360°$, 并取 $\mathrm{d}\varphi = 2.5°$; 经向方向上，取 $-90° < \theta < 90°$, 并取 $\mathrm{d}\theta = 0.9°$; 垂直方向上，取 $6\,370\,\mathrm{km} < r < 6\,550\,\mathrm{km}$, 并取 $\mathrm{d}r = 1.5\,\mathrm{km}$.

2.4　时间步长

FICE 算法属于全隐格式，时间步长本可以不受限制，由于边界采用了显式处理，时间步长应满足如下柯朗条件：

$$\Delta t < \Delta t_\mathrm{c} = \frac{\Delta z}{v_\mathrm{a} + w}, \tag{3}$$

这是 FICE 算法的一个弱点，但在一定条件下，这一弱点并不严重，因为时间步长短有利于提高精度，而且实现收敛迭代所需要的次数会相应减少，其计算量不会因时间步长短而增加过多 [4]. 为此，在本文的计算中取 $\Delta t = 0.25\,\Delta t_\mathrm{c}$.

3　计算结果分析

在对中、高层大气动力学的研究过程中，能量的传播和变化是我们最关注的问题之一. 为此我们首先对重力波波包的平均波能量密度 $\langle \varepsilon_\mathrm{w} \rangle$ 进行计算. 其中 $\langle \varepsilon_\mathrm{w} \rangle$ 由波能量密度 ε_w 通过低通滤波器滤波得到，滤波器在三个方向上的截止波长分别为：2 400 km、960 km 和 18 km. 定义波能量密度的最大值所在的位置为波包的中心位置，我们给出在波包中心位置处平均波能量密度的空间分布 (图 1 和图 2). 图 1 是波包中心位置处，平均波能量密度在 θ-r 平面的空间分布；图 2 是波包中心位置处，平均波能量密度在 φ-r 平面的空间分布. 由图 1 和图 2 可见，在波包的传播过程中，平均波能量密度的峰值在垂直方向上随时间向上传播；在纬向从高纬区域向低纬区域传播；而在经向由于波包的能量传输速度很小，所以能量传输不很明显. 这些与重力波线性理论的预言一致，表明在地球的中层大气中，一旦重力波被激发，波能量就能在地球大气中自由传播.

我们再将纬向风速用高通滤波器进行滤波得到纬向扰动速度 u', 滤波器在三个方向上的截止波长为：2 400 km、960 km 和 18 km. 我们给出不同时刻波包中心位置纬向扰动速度 u' 的空间分布 (图 3 和图 4). 图 3 是波包中心位置处，纬向扰动速度在 θ-r 平面的空间分布；图 4 是波包中心位置处，纬向扰动速度在 φ-r 平面的空间分布. 从图 3 和图 4 可

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

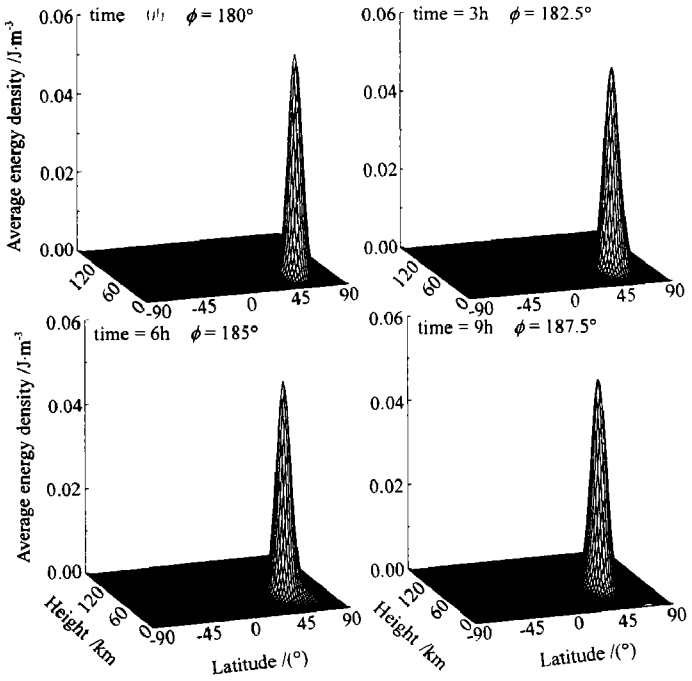


图 1 波包中心位置处平均波能量密度在 θ-r 平面的空间分布

Fig.1 The spatial distribution of average energy density in θ-r plane at the center of wave packet

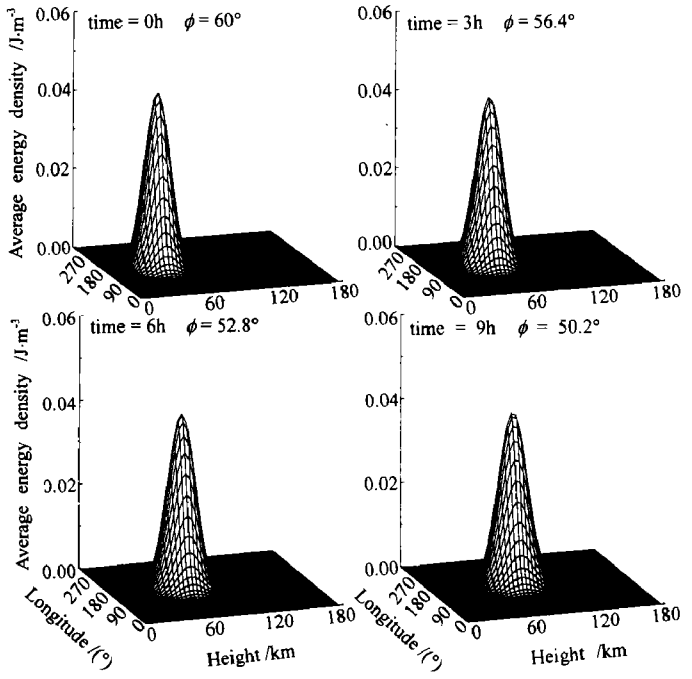


图 2 波包中心位置处平均波相关能量密度在 φ-r 平面的空间分布

Fig.2 The spatial distribution of average energy density in φ-r plane at the center of wave packet

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

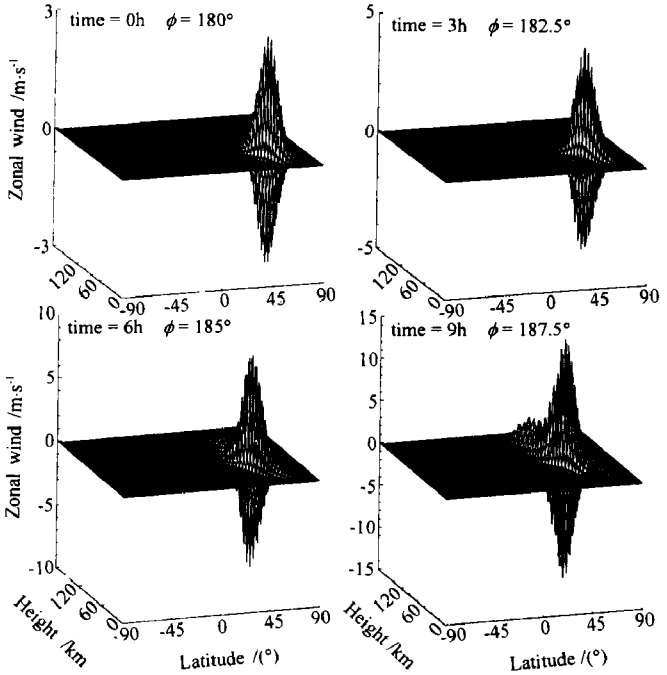


图 3　波包中心位置处纬向扰动速度在 θ-r 平面的空间分布

Fig.3　The spatial distribution of zonal disturbance velocity in θ-r plane at the center of wave packet

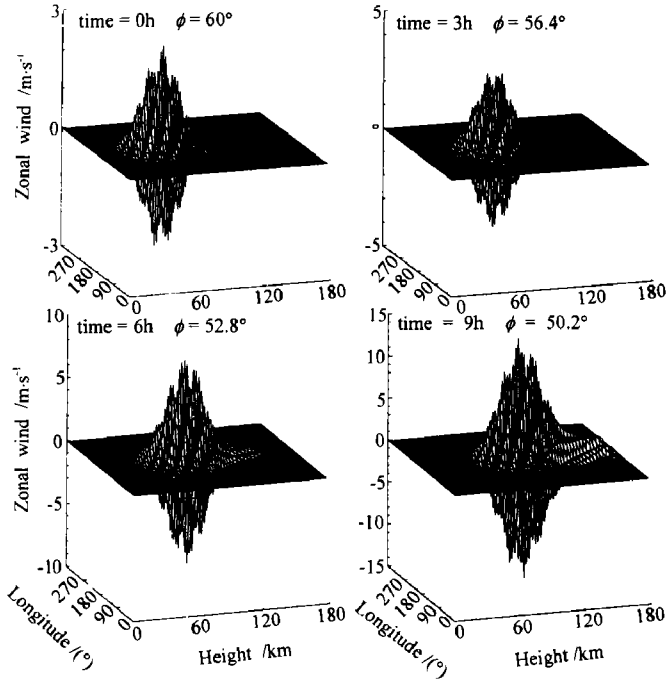


图 4　波包中心位置处纬向扰动速度在 φ-r 平面的空间分布

Fig.4　The spatial distribution of zonal disturbance velocity φ-r plane at the center of wave packet

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

见波相关的扰动速度和波包整体随时间向上传播. 初始时刻波包的中心位置在 60 km 的高度处, 经过了 9 h 的非线性传播后, 波包中心传播到大约 88 km 的高度处. 此外, 在波包向上传播过程中, 波相关扰动速度的振幅随高度增加而增加, 这是重力波在大气中传播的典型特征. 初始时刻, 纬向风速为 3 m/s, 经过了 9 h 的非线性传播后, 最大纬向扰动振幅增大到大约 15 m/s, 这与线性重力波理论的预言 (16 m/s) 比较接近. 这些结果说明, 重力波波包在地球大气中的非线性传播过程本质上仍然遵从线性理论.

最后, 我们研究重力波波包的能量传播路径和速度, 并将计算结果与重力波的射线理论进行定量比较 (图 5). 图 5 中实线是重力波射线理论给出的波包传播路径; 图中虚线是重力波能量的非线性传播路径, 即通过图 1 和图 2 中平均波能量密度的峰值位置估算得到. 图 5 中左图是重力波波包在 φ-r 平面的传播路径; 右图是重力波波包在 θ-r 平面的传播路径. 由图 5 可见, 重力波非线性能量传播路径与线性理论给出的结果比较一致. 在经向方向上, 波包初始时刻位于 180° 处, 经过了 9 h 的非线性传播后, 波包中心位于 187.5° 处, 平均能量传播速度为 2.31×10^{-4} (°)/s, 这与线性射线理论给出的波包群速度 (2.14×10^{-4} (°)/s) 非常接近; 在纬向方向上, 波包初始时刻位于 60° 处, 经过了 9 h 的非线性传播后, 波包中心位于 50.2° 处, 平均能量传播速度为 -3.02×10^{-4} (°)/s(北向为正), 这与线性射线理论给出的波包群速度 (3.54×10^{-4} (°)/s 也非常接近; 在垂直方向上, 波包初始时刻位于 60 km 处, 经过了 9 h 的非线性传播后, 波包中心位于 88.1 km 处, 平均能量传播速度为 0.87 m/s, 这与线性射线理论给出的波包群速度 (0.85 m/s) 十分接近. 这些结果说明线性重力波理论能够很好地预言重力波相关能量在中层大气中的非线性传播路径和速度. 这与重力波波包在二维等温大气中的传播结果 [5] 很一致, 而与波包在二维非等温大气中的传播结果 [6] 差异很大, 考虑到本文中的初始背景是等温大气, 因此本文的计算结果与二维局地坐标系中重力波非线性传播的数值计算结果能够很好地吻合.

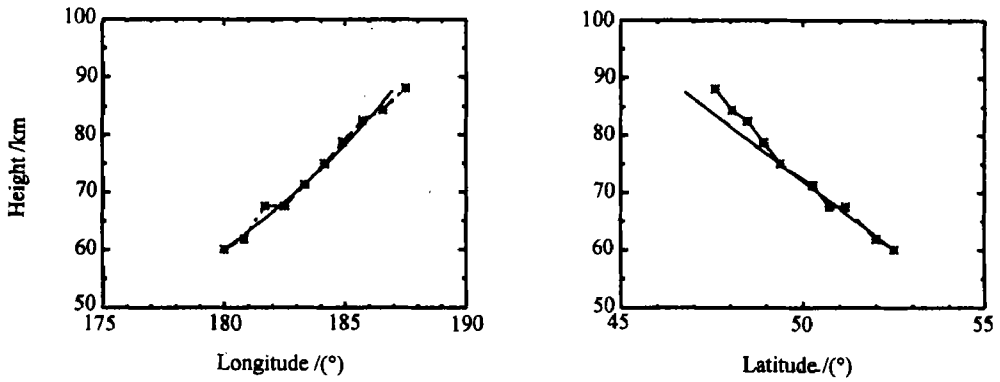


图 5 重力波波包的非线性传播路径

Fig.5 Nonlinear propagation path of gravity-wave packet

4 结 论

将三维球坐标系下的大气基本运动方程作为控制方程, 采用 FICE 格式, 对三维球坐标系下重力波波包在中层大气的非线性传播过程进行了数值模拟. 模拟结果完整反映了

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

重力波波包在中层大气的非线性传播过程. 在重力波的传播过程中, 波包整体和波相关能量随时间向上传播, 波振幅随高度增加而增加, 最大振幅与线性理论的预言十分接近; 波相关能量的传输路径与线性理论给出的射线路径非常吻合, 并且, 波相关能量的传输速度与射线理论给出的群速度也很接近. 这说明, 在中层大气中, 一旦一个向上传播的重力波扰动被激发, 波相关扰动和波相关能量就能沿着线性重力波理论给出的射线理论自由地向上传播, 它的传播过程本质上遵循线性重力波理论.

参　考　文　献

[1] Zhang S D, Yi F. A numerical study of nonlinear propagation of a gravity-wave packet in compressible atmosphere. *J. Geophys. Res.*, 1999, **104**(D6):14 261—14 270

[2] Andreassen O, Erik C W. Gravity wave breaking in two and three dimensions 1. Model description and comparison of two-dimensional evolutions. *J. Geophys. Res.*, 1994, **99**(D4):8 095—8 108

[3] 张绍东, 易帆, 熊东辉. 三维球坐标系下波包非线性传播过程的一种数值求解方法. 空间科学学报, 2001, **21**(1):17—28

[4] Hu Y Q, Wu, S T. A full-implicit-continus-Eulerian (FICE) scheme for multidimensional transient magnetohydrodynamic (MHD). *J. Comput. Phys.*, 1984, **55**(1):33—64

[5] 张绍东, 易帆. 重力波波包在可压大气中的非线性传播. 空间科学学报, 1998, **18**(1):98—110

[6] 张绍东, 易帆. 重力波波包在非等温和可压大气中的非线性传播. 空间科学学报, 1998, **18**(3):213—221

A NUMERICAL STUDY OF NONLINEAR PROPAGATION OF A GRAVITY-WAVE PACKET IN 3-DIMENSIONAL GLOBAL COORDINATION

ZHANG Shaodong　YI Fan　XIONG Donghui

(*Department of Radio Science and Technology, Wuhan University,* 430072)

Abstract

By using full-implicit-continuous-Eulerian (FICE) scheme, and taking the atmospheric basic motion equations in 3-dimensional global coordination as the governing equations, a numerical simulation of nonlinear propagation of a gravity-wave packet in mesosphere is presented. The numerical results perfectly show the nonlinear propagation of a gravity-wave packet in mesosphere. A comparison of the numerical results with the linear gravity-wave theories is also presented.

Key words　3-dimension, Gravity-wave packet, Nonlinear propagation

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com