第21卷 第2期 空 间 科 学 学 报 Vol.21, No.2
2001 年 4 月 CHINESE JOURNAL OF SPACE SCIENCE Apr., 2001

三维重力波非线性传播数值模型的一种求解格式*

岳显昌 易 帆
(武汉大学无线电科学技术系 430072)

摘 要

采用交替方向隐格式 (ADI) 求解三维可压大气中重力波非线性传播的数值模型. 经过几个波周期后, 重力波波包仍然沿着线性理论射线方向稳定地传播, 波包保持着很好的形状, 内点和边界保持稳定; 水平风与垂直运动的振幅随着传播高度的增加而增加. 这说明 ADI 格式是模拟三维可压大气中重力波传播的一种可靠的格式. 模拟结果也表明, 在非线性情况下, 重力波仍可保持线性传播的某些特征, 非线性效应主要表现在对波包传播速度的修正.

关键词 重力波—非线性效应—交替方向隐格式 (ADI)

1 引 言

人们很早就应用数值模拟来研究重力波非线性传播的过程, 20 世纪 80 年代, 对重力波在中高层大气中的非线性传播进行数值模拟所采用的模型过于简单. 进入 90 年代后, 人们开始进行较为复杂的重力波波包非线性传播过程的数值模拟工作, 而这些工作也主要考虑的是二维情况. 其中张绍东、易帆等 [1] 应用全隐欧拉 (FICE) 格式, 在二维情况下对重力波波包在等温、可压大气中的非线性传播过程进行了数值模拟, 给出了小振幅重力波波包在顺风情况下传播的全过程, 取得了较好的数值计算结果.

在大气波动的数值模拟研究中, 人们期望能够实现真实空间的模拟, 但由于维数的增加而使得模型更加复杂, 计算量、计算内存需求量和结果数据存储量激增, 所幸的是近来计算机技术的突飞猛进, 在一定程度上缓解了这些困难, 使得三维模拟成为可能. 发展高效可靠和长期计算稳定的三维数值格式便成为人们追求的目标. 我们采用交替方向隐格式 (ADI) 对三维可压大气中声重波非线性传播的数值模型进行了求解, 介绍了三维重力波非线性传播的数值模型, 计算参数与计算结果在第 3 节中给出.

2 可压大气中声重波非线性传播的数值模型

2.1 控制方程

考虑在可压、无摩擦和绝热大气背景下, 三维大气动力学方程 [2] 有式 (1) 形式. 其中 x 方向为水平东西方向 (向东为正), y 方向为水平南北方向 (向北为正), z 方向为垂直方向 (向

* 国家自然科学基金重大项目 (49990450), 国家杰出青年基金 (49625407) 共同资助
2000-10-19 收到原稿, 2001-02-12 收到修定稿

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

上为正). u,v,w 分别为水平东向风速、北向风速和垂直运动; u',v' 是重力波扰动水平速度分量; ρ,p 分别为密度和压强; $\gamma=c_p/c_v$ 是比热比, c_p 为定压比热 (c_p =1 005 $\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$); c_v 为定容比热 (c_v = 718 $\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$); g 为重力加速度 (g = 9.80225 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}-fv'=0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+fu'=0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}+g=0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}+u\dfrac{\partial p}{\partial x}+v\dfrac{\partial p}{\partial y}+w\dfrac{\partial p}{\partial z}+\gamma p\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)=0, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+u\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+v\dfrac{\partial \rho}{\partial y}+w\dfrac{\partial \rho}{\partial z}+\rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)=0. \end{cases} \tag{1}$$

2.2　数值格式

我们的数值计算主要是研究声重波波包的传播过程, 对于中尺度重力波传播过程是一个慢变过程. 要实现这种数值模拟, 要求差分算法具有实际精度高、长期计算稳定、结果可靠性好的特点[3]. 为此, 本文中的数值模拟采用交替方向隐格式 (ADI) 的一种形式, PC 格式. 该格式在三维情况下是无条件稳定的. 在对变量进行网格分配的过程中, 为避免棋盘误差并提高计算精度, 在本方法中, 垂直方向采取交错均匀网格 (见图 1)[3]. 其控制方程 (1) 可写为

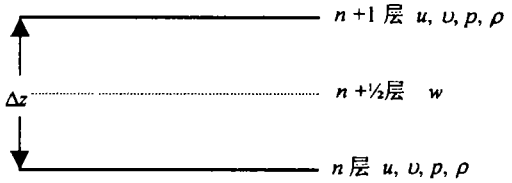


图 1　垂直方向网格点选取及变量配置
Fig.1　The vertical arrangement of the grid points and the variables

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A\frac{\partial U}{\partial x}+B\frac{\partial U}{\partial y}+C\frac{\partial U}{\partial z}=S. \tag{2}$$

式中,

$$U=\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ \rho \end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix} u & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ \gamma p & 0 & 0 & u & 0 \\ \rho & 0 & 0 & 0 & u \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} v & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & v & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & v \end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix} w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma p & w & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & w \end{bmatrix},\quad S=\begin{bmatrix} fv' \\ -fu' \\ -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

因此，方程 (1) 的 PC 格式差分方程可写成如下形式:

$$\begin{cases} \dfrac{U^{n+\frac{1}{6}}-U^{n}}{\tau/2}=-\dfrac{A^{n}}{\Delta x}\delta_x U^{n+\frac{1}{6}}+[f(v')^{n},0,0,0,0]^{\mathrm{T}}, \\ \dfrac{U^{n+\frac{1}{3}}-U^{n+\frac{1}{6}}}{\tau/2}=-\dfrac{B^{n+\frac{1}{6}}}{\Delta y}\delta_y U^{n+\frac{1}{3}}+[0,-f(u')^{n+\frac{1}{6}},0,0,0]^{\mathrm{T}}, \\ \dfrac{U^{n+\frac{1}{2}}-U^{n+\frac{1}{3}}}{\tau/2}=-\dfrac{C^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta z}\delta_z U^{n+\frac{1}{2}}+(0,0,-g,0,0)^{\mathrm{T}}, \\ \dfrac{U^{n+1}-U^{n}}{\tau}=-\Big(\dfrac{A^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}\delta_x+\dfrac{B^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y}\delta_y+\dfrac{C^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z}\delta_z\Big)U^{n+\frac{1}{2}}+S. \end{cases} \tag{4}$$

其中，τ 为时间步长，U^n 代表 $U^n_{i,j,k}$，其余 $A^n, B^{n+1/6}, C^{n+1/3}$ 等以此类推，δ 为一阶中心差分算符，如 $\delta_x U^{n+1/6}=\delta_x U^{n+1/6}_{i,j,k}=\dfrac{1}{2}(U^{n+1/6}_{i+1,j,k}-U^{n+1/6}_{i-1,j,k})$，$\delta_y, \delta_z$ 有类似定义.

差分方程 (4) 的分步格式如下:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\Delta t}(u^{T1}_{i,j,k}-u^{n}_{i,j,k})+u^{n}_{i,j,k}(u^{T1}_{i+1,j,k}-u^{T1}_{i-1,j,k})\dfrac{1}{2\Delta x}+ \\ \quad \dfrac{1}{\rho^{n}_{i,j,k}}(p^{T1}_{i+1,j,k}-p^{T1}_{i-1,j,k})\dfrac{1}{2\Delta x}-f(v^{n}_{i,j,k}-v_0)=0, \\ [-1mm]\dfrac{2}{\Delta t}(v^{T1}_{i,j,k}-v^{n}_{i,j,k})+u^{n}_{i,j,k}(v^{T1}_{i+1,j,k}-v^{T1}_{i-1,j,k})\dfrac{1}{2\Delta x}=0, \\ [-0.5mm]\dfrac{2}{\Delta t}(w^{T1}_{i,j,k}-w^{n}_{i,j,k})+\dfrac{1}{2}(u^{n}_{i,j,k-1}+u^{n}_{i,j,k+1})\dfrac{1}{2\Delta x}(w^{T1}_{i+1,j,k}-w^{T1}_{i-1,j,k})=0, \\ \dfrac{2}{\Delta t}(p^{T1}_{i,j,k}-p^{n}_{i,j,k})+u^{n}_{i,j,k}(p^{T1}_{i+1,j,k}-p^{T1}_{i-1,j,k})\dfrac{1}{2\Delta x}+ \\ \quad \gamma p^{n}_{i,j,k}\dfrac{1}{2\Delta x}(u^{T1}_{i+1,j,k}-u^{T1}_{i-1,j,k})=0, \\ \dfrac{2}{\Delta t}(\rho^{T1}_{i,j,k}-\rho^{n}_{i,j,k})+u^{n}_{i,j,k}(\rho^{T1}_{i+1,j,k}-\rho^{T1}_{i-1,j,k})\dfrac{1}{2\Delta x}+ \\ \quad \rho^{n}_{i,j,k}(u^{T1}_{i+1,j,k}-u^{T1}_{i-1,j,k})\dfrac{1}{2\Delta x}=0. \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\Delta t}(u^{T2}_{i,j,k}-u^{T1}_{i,j,k})+v^{T1}_{i,j,k}(u^{T2}_{i,j+1,k}-u^{T2}_{i,j-1,k})\dfrac{1}{2\Delta y}=0, \\ \dfrac{2}{\Delta t}(v^{T2}_{i,j,k}-v^{T1}_{i,j,k})+v^{T1}_{i,j,k}(v^{T2}_{i,j+1,k}-v^{T2}_{i,j-1,k})\dfrac{1}{2\Delta y}+ \\ \quad \dfrac{1}{\rho^{T1}_{i,j,k}}(p^{T2}_{i,j+1,k}-p^{T2}_{i,j-1,k})\dfrac{1}{2\Delta y}+f(u^{T1}_{i,j,k}-u_0)=0, \\ \dfrac{2}{\Delta t}(w^{T2}_{i,j,k}-w^{T1}_{i,j,k})+\dfrac{1}{2}(v^{T1}_{i,j,k-1}+v^{T1}_{i,j,k+1})\dfrac{1}{2\Delta y}(w^{T2}_{i,j+1,k}-w^{T2}_{i,j-1,k})=0, \\ \dfrac{2}{\Delta t}(p^{T2}_{i,j,k}-p^{T1}_{i,j,k})+v^{T1}_{i,j,k}(p^{T2}_{i,j+1,k}-p^{T2}_{i,j-1,k})\dfrac{1}{2\Delta y}+ \\ \quad \gamma p^{T1}_{i,j,k}\dfrac{1}{2\Delta y}(v^{T2}_{i,j+1,k}-v^{T2}_{i,j-1,k})=0, \\ \dfrac{2}{\Delta t}(\rho^{T2}_{i,j,k}-\rho^{T1}_{i,j,k})+v^{T1}_{i,j,k}(\rho^{T2}_{i,j+1,k}-\rho^{T2}_{i,j-1,k})\dfrac{1}{2\Delta y}+ \\ \quad \rho^{T1}_{i,j,k}\dfrac{1}{2\Delta y}(v^{T2}_{i,j+1,k}-v^{T2}_{i,j-1,k})=0. \end{cases} \tag{4.2}$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

$$
\begin{cases}
\dfrac{2}{\Delta t}(u^{T3}_{i,j,k}-u^{T2}_{i,j,k})+\dfrac{1}{2}(w^{T2}_{i,j,k}+w^{T2}_{i,j,k-1})(u^{T3}_{i,j,k+1}-u^{T3}_{i,j,k-1})\dfrac{1}{2\Delta z}=0,\\
\dfrac{2}{\Delta t}(v^{T3}_{i,j,k}-v^{T2}_{i,j,k})+\dfrac{1}{2}(w^{T2}_{i,j,k}+w^{T2}_{i,j,k-1})(v^{T3}_{i,j,k+1}-v^{T3}_{i,j,k-1})\dfrac{1}{2\Delta z}=0,\\
\dfrac{2}{\Delta t}(w^{T3}_{i,j,k}-w^{T2}_{i,j,k})+w^{T3}_{i,j,k}(w^{T3}_{i,j,k+1}-w^{T3}_{i,j,k-1})\dfrac{1}{2\Delta z}+\\
\quad\dfrac{2}{\rho^{T2}_{i,j,k}+\rho^{T2}_{i,j,k+1}}(p^{T3}_{i,j,k+1}-p^{T3}_{i,j,k})\dfrac{1}{\Delta z}+g(k)=0,\\
\dfrac{2}{\Delta t}(p^{T3}_{i,j,k}-p^{T2}_{i,j,k})+\dfrac{1}{2}(w^{T2}_{i,j,k}+w^{T2}_{i,j,k-1})(p^{T3}_{i,j,k+1}-p^{T3}_{i,j,k-1})\dfrac{1}{2\Delta z}+\\
\quad\gamma p^{T2}_{i,j,k}(w^{T3}_{i,j,k}-w^{T3}_{i,j,k-1})\dfrac{1}{\Delta z}=0,\\
\dfrac{2}{\Delta t}(\rho^{T3}_{i,j,k}-\rho^{T2}_{i,j,k})+\dfrac{1}{2}(w^{T2}_{i,j,k}+w^{T2}_{i,j,k-1})(\rho^{T3}_{i,j,k+1}-\rho^{T3}_{i,j,k-1})\dfrac{1}{2\Delta z}+\\
\quad\rho^{T2}_{i,j,k}(w^{T3}_{i,j,k}-w^{T3}_{i,j,k-1})\dfrac{1}{\Delta z}=0.
\end{cases}
\tag{4.3}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{\Delta t}(u^{n+1}_{i,j,k}-u^{n}_{i,j,k})+u^{T3}_{i,j,k}(u^{T3}_{i+1,j,k}-u^{T3}_{i-1,j,k})\dfrac{1}{2\Delta x}+\\
\quad\dfrac{1}{\rho^{T3}_{i,j,k}}(p^{T3}_{i+1,j,k}-p^{T3}_{i-1,j,k})\dfrac{1}{2\Delta x}+v^{T3}_{i,j,k}(u^{T3}_{i,j+1,k}-u^{T3}_{i,j-1,k})\dfrac{1}{2\Delta y}+\\
\quad\dfrac{1}{2}(w^{T3}_{i,j,k}+w^{T3}_{i,j,k-1})(u^{T3}_{i,j,k+1}-u^{T3}_{i,j,k-1})\dfrac{1}{2\Delta z}-f(v^{T3}_{i,j,k}-v_0)=0,\\
\dfrac{1}{\Delta t}(v^{n+1}_{i,j,k}-v^{n}_{i,j,k})+u^{T3}_{i,j,k}(v^{T3}_{i+1,j,k}-v^{T3}_{i-1,j,k})\dfrac{1}{2\Delta x}+\\
\quad v^{T3}_{i,j,k}(v^{T3}_{i,j+1,k}-v^{T3}_{i,j-1,k})\dfrac{1}{2\Delta y}+\dfrac{1}{\rho^{T3}_{i,j,k}}(p^{T3}_{i,j+1,k}-p^{T3}_{i,j-1,k})\dfrac{1}{2\Delta y}+\\
\quad\dfrac{1}{2}(w^{T3}_{i,j,k}+w^{T3}_{i,j,k-1})(v^{T3}_{i,j,k+1}-v^{T3}_{i,j,k-1})\dfrac{1}{2\Delta z}+f(u^{T3}_{i,j,k}-u_0)=0,\\
\dfrac{1}{\Delta t}(w^{n+1}_{i,j,k}-w^{n}_{i,j,k})+w^{T3}_{i,j,k}(w^{T3}_{i,j,k+1}-w^{T3}_{i,j,k-1})\dfrac{1}{2\Delta z}+\dfrac{1}{2}(u^{T3}_{i,j,k-1}+u^{T3}_{i,j,k+1})\cdot\\
\quad\dfrac{1}{2\Delta x}(w^{T3}_{i+1,j,k}-w^{T3}_{i-1,j,k})+\dfrac{1}{2}(v^{T3}_{i,j,k-1}+v^{T3}_{i,j,k+1})\dfrac{1}{2\Delta y}(w^{T3}_{i,j+1,k}-w^{T3}_{i,j-1,k})+\\
\quad\dfrac{2}{\rho^{T3}_{i,j,k}+\rho^{T3}_{i,j,k+1}}(p^{T3}_{i,j,k+1}-p^{T3}_{i,j,k})\dfrac{1}{\Delta z}+g(k)=0,\\
\dfrac{1}{\Delta t}(p^{n+1}_{i,j,k}-p^{n}_{i,j,k})+u^{T3}_{i,j,k}(p^{T3}_{i+1,j,k}-p^{T3}_{i-1,j,k})\dfrac{1}{2\Delta x}+v^{T3}_{i,j,k}(p^{T3}_{i,j+1,k}-p^{T3}_{i,j-1,k})\dfrac{1}{2\Delta y}+\\
\quad\dfrac{1}{2}(w^{T3}_{i,j,k}+w^{T3}_{i,j,k-1})(p^{T3}_{i,j,k+1}-p^{T3}_{i,j,k-1})\dfrac{1}{2\Delta z}+\gamma p^{T3}_{i,j,k}\Big[\dfrac{1}{2\Delta x}(u^{T3}_{i+1,j,k}-u^{T3}_{i-1,j,k})+\\
\quad\dfrac{1}{2\Delta y}(v^{T3}_{i,j+1,k}-v^{T3}_{i,j-1,k})+\dfrac{1}{\Delta z}(w^{T3}_{i,j,k}-w^{T3}_{i,j,k-1})\Big]=0,\\
\dfrac{1}{\Delta t}(\rho^{n+1}_{i,j,k}-\rho^{n}_{i,j,k})+u^{T3}_{i,j,k}(\rho^{T3}_{i+1,j,k}-\rho^{T3}_{i-1,j,k})\dfrac{1}{2\Delta x}+v^{T3}_{i,j,k}(\rho^{T3}_{i,j+1,k}-\rho^{T3}_{i,j-1,k})\dfrac{1}{2\Delta y}+\\
\quad\dfrac{1}{2}(w^{T3}_{i,j,k}+w^{T3}_{i,j,k-1})(\rho^{T3}_{i,j,k+1}-\rho^{T3}_{i,j,k-1})\dfrac{1}{2\Delta z}+\rho^{T3}_{i,j,k}\Big[\dfrac{1}{2\Delta x}(u^{T3}_{i+1,j,k}-u^{T3}_{i-1,j,k})+\\
\quad\dfrac{1}{2\Delta y}(v^{T3}_{i,j+1,k}-v^{T3}_{i,j-1,k})+\dfrac{1}{\Delta z}(w^{T3}_{i,j,k}-w^{T3}_{i,j,k-1})\Big]=0.
\end{cases}
\tag{4.4}
$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

2.3 边界条件

z 轴方向上、下边界采用近特征线边界，由沿外行近特征线的相容关系和沿内行特征线的近特征量的过给定所组成. 且边值一经确定后，在对内点差分方程进行直接求解的过程中一直维持不变 [3].

首先，对相容关系宜采取显式处理，即用上一时间步的值构成各空间微商项的差分近似；且边值一经确定之后，在对内点差分方程进行直接求解的过程中一直维持不变. 实践表明，这种处理方法有利于提高计算的稳定性.

为保证近特征线边界条件的精度和稳定性，时间步长应满足如下柯朗条件：

$$\Delta t < \Delta t_{\mathrm{c}} = \frac{\Delta z}{c_{\mathrm{s}} + w}. \tag{5}$$

3 模式的检验

3.1 数值计算参数的选取

3.1.1 初始背景

设初始背景大气为等温、流体静力学平衡大气，并假定水平均匀. 取水平东向风速为 $0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$，水平北向风速为 $0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$，垂直运动为 $0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$，即

$$\rho_0 = \rho_{\mathrm{c}} \mathrm{e}^{-\frac{z}{h}}, \quad p_0 = p_{\mathrm{c}} \frac{\rho_0}{\rho_{\mathrm{c}}}, \quad u_0 = 0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}, \quad v_0 = 0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}, \quad w_0 = 0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

式中，$p_{\mathrm{c}}, \rho_{\mathrm{c}}$ 为海平面大气压强和密度，$h = p_{\mathrm{c}}/(\rho_{\mathrm{c}} g)$.

3.1.2 初始扰动

初始时刻，在流体静力学平衡、等温大气中加上一个向上传播的高斯型重力波波包扰动，其水平扰动速度具有如下的形式：

$$u'(x,y,z,0) = u_{\mathrm{c}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-x_{\mathrm{c}})^2}{2\sigma_x^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(y-y_{\mathrm{c}})^2}{2\sigma_y^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(z-z_{\mathrm{c}})^2}{2\sigma_z^2}} \sin[k_x(x-x_{\mathrm{c}}) + k_y(y-y_{\mathrm{c}}) + k_z(z-z_{\mathrm{c}})]. \tag{6}$$

式中 $u_{\mathrm{c}}, x_{\mathrm{c}}, y_{\mathrm{c}}, z_{\mathrm{c}}$ 为常数，$u_{\mathrm{c}} = 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$x_{\mathrm{c}} = 1\,250\,\mathrm{km}$，$y_{\mathrm{c}} = 1\,250\,\mathrm{km}$，$z_{\mathrm{c}} = 50\,\mathrm{km}$. k_x, k_y, k_z 分别为重力波的东向、北向和垂直波数，$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 为波包的半宽度. 根据中层的观测 [4−7]，取水平波长 $\lambda_x = \lambda_y = 500\,\mathrm{km}$，垂直波长 $\lambda_z = 10\,\mathrm{km}$，$\sigma_x = \lambda_x$，$\sigma_y = \lambda_y$，$\sigma_z = \lambda_z$. 取惯性频率 $f = 1.36 \times 10^{-4}\mathrm{s^{-1}}$，利用这些波参数，通过重力波的色散关系求得重力波本征频率 Ω 为 $4.9431 \times 10^{-4}\mathrm{s^{-1}}$；当忽略惯性频率时，$\Omega = 5.1266 \times 10^{-4}\mathrm{s^{-1}}$.

其他物理量的初始扰动 $(v'(x,y,z,0), w'(x,y,z,0), \rho'(x,y,z,0), p'(x,y,z,0))$ 由重力波的线性偏振关系求出. 即：

$$\begin{cases} v' = \dfrac{(\Omega^2 - f^2)k_x k_y + \mathrm{i}\Omega f(k_x^2 + k_y^2)}{\Omega^2 k_x^2 + f^2 k_y^2} u', \\ w' = \dfrac{\Omega c^2 k_x k_z + (\gamma-1) g f k_y + \mathrm{i}[f c^2 k_y k_z - (\gamma-1) g \Omega k_x]}{(\Omega^2 k_x^2 + f^2 k_y^2)(\Omega^2 - \omega_{\mathrm{b}}^2) c^2} (\Omega^2 - f^2)\Omega u', \\ p' = \dfrac{(\Omega^2 - f^2)(\Omega k_x + \mathrm{i} f k_y)}{\Omega^2 k_x^2 + f^2 k_y^2} \rho_0 u', \\ \rho' = \dfrac{(\Omega^2 - \omega_{\mathrm{b}}^2 \gamma/2)(\mathrm{i} f k_y + \Omega k_x) + (\gamma-1) g k_z (f k_y - \mathrm{i}\Omega k_x)}{(\Omega^2 k_x^2 + f^2 k_y^2)(\Omega^2 - \omega_{\mathrm{b}}^2) c^2} (\Omega^2 - f^2)\rho_o u'. \end{cases} \tag{7}$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

式中 ω_b 为 Brunt-Väisälä 频率或浮力频率，$\Omega = \omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}$($\boldsymbol{k}$ 为波矢，$\boldsymbol{v}$ 为基本气流)，$H = p_0/\rho_0 g = RT_0/g$ 为大气标高，其中 p_0, ρ_0, T_0 分别为静止大气的压强、密度和温度，R 为气体常数. 我们将初始背景值和 (6)、(7) 式中的初始扰动值 (取实部) 加在一起作为初值 ($U = U_0 + U'$) 代入 (1) 式中进行数值计算.

3.1.3　空间步长和计算区域

在数值计算中，我们的研究范围是在 0 km$\leqslant x \leqslant$ 4500 km, 0 km$\leqslant y \leqslant$ 4500 km, 15 km$\leqslant z \leqslant$ 135 km. 考虑到引入的重力波扰动的空间尺度，分别取 $\Delta x = \Delta y = 50$ km, $\Delta z = 1.5$ km.

3.2　非线性传播过程计算结果分析

图 2(a)—(b) 给出了三维重力波非线性传播模拟示意图. 首先观察重力波波包水平东向扰动速度在 x-z 面和 x-y 面投影的非线性传播过程 (图 2(a)、(b)). 由图 2(a) 可以很明显地看出重力波波包在计算区域中向上传播；图 2(b) 中重力波波包在计算区域中沿群速度方向传播. 波包在传播过程中，形状基本保持不变，但扰动覆盖范围较初始时刻有所增加. 计算区域的内点保持稳定，边界也保持稳定. 波相关扰动速度随高度的增加而增长. 初始时刻波包峰值位置水平扰动速度为 1 m·s^{-1}，经过了 16 h 的传播后，当波包传播到大约 91.7 km 的高度上时，水平波相关扰动速度增长到大约 18 m·s^{-1}，这与线性重力波理论的求值很接近，这表明应用 ADI 格式进行的计算是稳定的，也说明非线性效应对重力波振幅的影响很小.

重力波波包在中层的非线性传播中，伴随着波相位向下传播，波包向上传播能量. 为清晰地反映波相关能量的垂直传输方向，我们对垂直方向上的平均波能量密度 $\langle\varepsilon_w\rangle$ 进行计算 (其中 $\varepsilon_w = \frac{1}{2}\rho_0(u'^2 + v'^2 + w'^2) + \frac{p'^2}{2\rho_0 c^2} + \frac{(p' - \rho_0 c^2)^2}{2\rho_0(\gamma-1)c^2}$, c 为声速), $\langle\varepsilon_w\rangle$ 是由 ε_w 用带通滤波器滤波后得到的. 图 2(c) 为平均垂直能量通量在不同时刻的 x-z 平面投影空间分布图，图 2(d) 为平均垂直能量通量在不同时刻的 x-y 平面投影空间分布. 在波包的传播过程中，在大部分计算区域中平均垂直波能量通量为正，表明在大部分区域波相关能量向上传输，这与线性重力波理论的预言是完全一致的.

由于重力波在对流层和中层之间能量传输过程中起着极为重要的作用，因此在重力波的研究过程中，人们往往关注于重力波垂直方向的传播行为. 为此我们给出了不同时刻在波包峰值位置波相关水平扰动速度的 x-z 平面投影高度剖面图 (图 3). 从图 3 可以很清晰地看到重力波波包向上传播. 在传播过程中，波相关扰动速度振幅随高度增加而增长. 传播了大约 15 h 后，高度约为 89 km 处，由于波与平流的非线性相互作用，背景风场显著增强，水平风振幅迅速增加，这与许多学者对重力波在中层顶的观测结果一致，也与张绍东等的二维计算结果相一致 [1]. 并且，增强的背景风随高度的增加而增加，在那些水平风振幅很小的高度上，背景风的增加很小，而在那些水平风振幅很大的高度上，背景风的增强很显著. 另外，从图 3 我们还可以观察到重力波在均匀背景风场中传播了 16 h 后，波包仍然稳定传播，并且波包形状没有明显改变.

由于经过了长时间 (几个波周期) 的传播后，重力波波包的形状变化不大，因此我们可以将波能量传播路径与从线性重力波理论导出的射线路径进行比较. 如图 4(a)、(b)(分别为三维重力波空间传播路径与线性理论射线在 x-z 平面与 x-y 平面的投影) 所示，实线

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

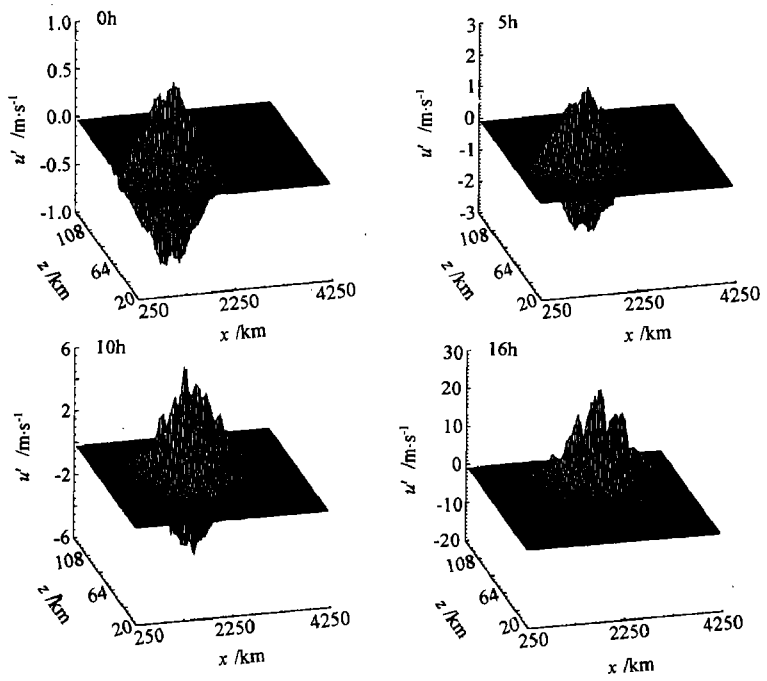


图 2(a) 东向风的传播在 x-z 平面的投影图

图 2(a) The propagation of eastward disturbance velocity of gravity-wave packet projecting on x-z plane

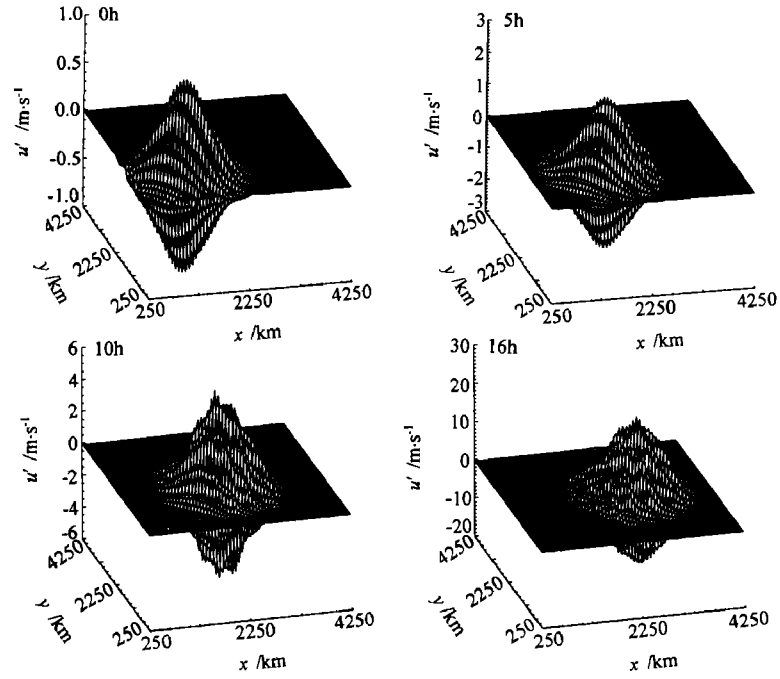


图 2(b) 东向风的传播在 x-y 平面的投影图

图 2(b) Propagation of eastward perturbation velocity of the gravity-wave packet projecting on x-y plane

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

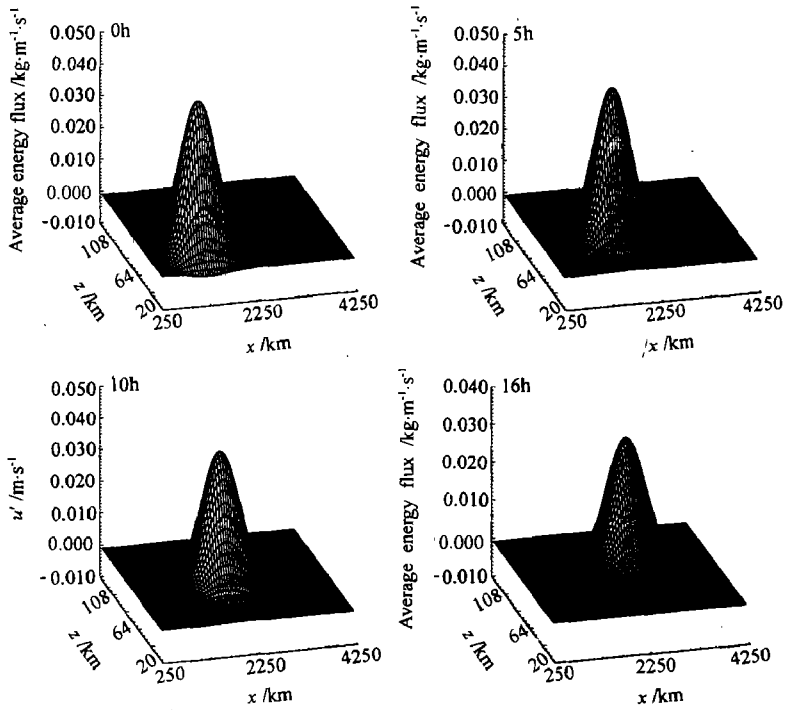


图 2(c)　重力波传播过程能量分布在 x-z 平面的投影图

图 2(c)　Averaged wave energy density at various times in an isothermal three-dimensional atmosphere projecting on x-z plane

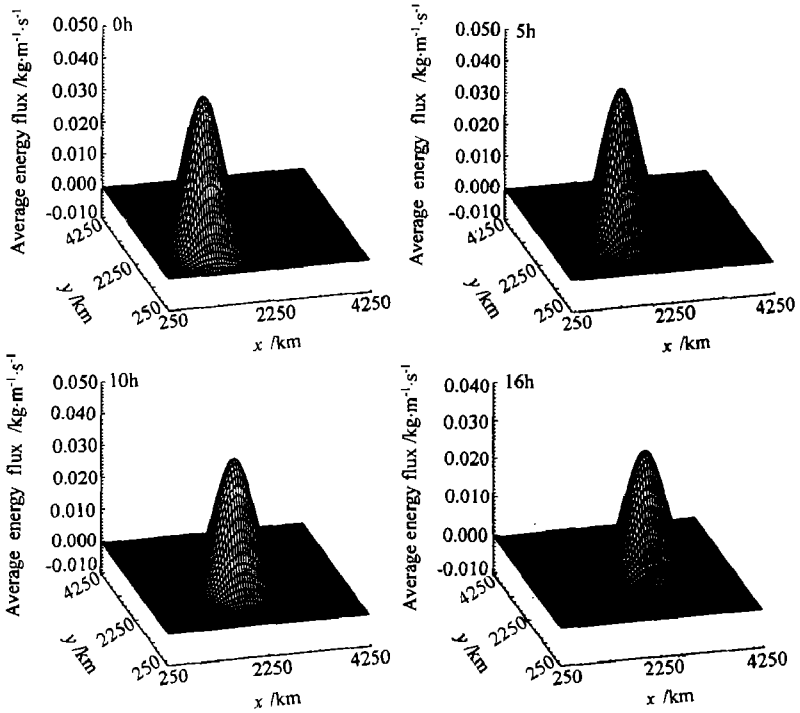


图 2(d)　重力波传播过程能量分布在 x-y 平面的投影图

图 2(d)　Averaged wave energy density at various times in an isothermal three-dimensional atmosphere projecting on x-y plane

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

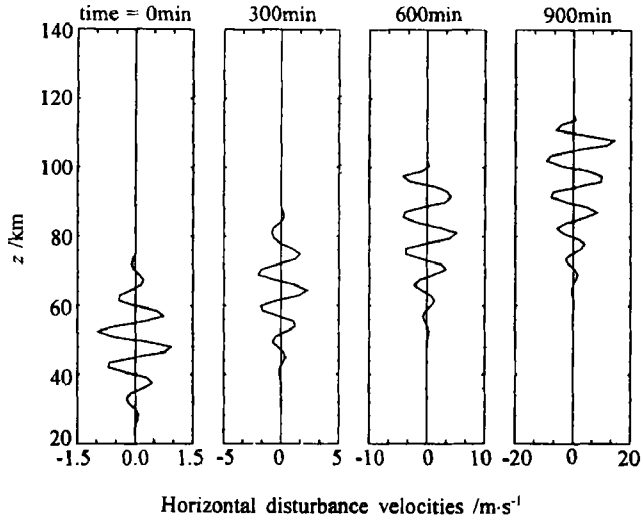


图 3 重力波波包峰值位置波相关水平东向风扰动随时间变化的高度剖面图

Fig.3 Profiles of eastward wave-associated perturbation velocities at various times in an isothermal three-dimensional atmosphere

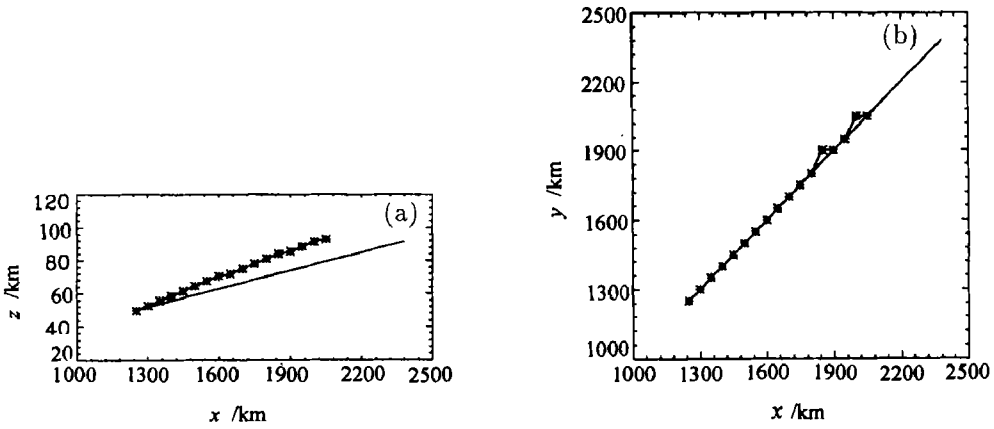


图 4 (a) 重力波波包能量传播路径在 x-z 平面投影图, (b) 重力波波包能量传播路径在 x-y 平面投影图

Fig.4 (a) The wave energy propagation path of the gravity-wave packet in an isothermal three-dimensional atmosphere projecting on x-z plane, (b) The wave energy propagation path of the gravity-wave packet in an isothermal three-dimensional atmosphere projecting on x-y plane

代表通过重力波的线性射线理论得到的波包传播路径; "*" 线是从本文计算结果得到的重力波波包的非线性传播路径, 即能量中心的传播路径. 图中的每个 "*" 点对应于传播过程中整小时时刻的数据结果. 从图 4(a) 可看出重力波波包的非线性传播路径与从线性射线理论得到的射线路径非常接近, 波包能量的垂直传输速度与从线性波理论导出的群速度基本相等, 但波包能量的水平传输速度明显小于从线性波理论导出的群速度. 图 4(a) 中的 "*" 线表明, 波包峰值在初始时刻位于 $x = 1250\,\mathrm{km}$, $z = 50\,\mathrm{km}$, 在传播了 16 h 后, 波包峰值位于 $x = 2100\,\mathrm{km}$, $z = 91\,\mathrm{km}$ 处, 平均水平东向传播速度为 $14.76\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, 小于线性

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

理论的计算结果 ($19.65\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$); 平均垂直运动速度为 $0.712\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, 与线性理论的计算结果 ($0.724\mathrm{m\cdot s^{-1}}$) 非常接近; 图 4(b) 中的 "*" 线表明, 波包峰值在初始时刻位于 $x = 1250\,\mathrm{km}$, $y = 1250\,\mathrm{km}$, 在传播了 16 h 后, 波包峰值位于 $x = 2100\,\mathrm{km}$, $y = 2100\,\mathrm{km}$ 处, 平均水平北向传播速度为 $14.76\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, 小于线性理论的计算结果 ($19.65\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$). 这说明一个小振幅上行重力波被激发, 它能自由、稳定地沿着它的射线路径长时间传播, 非线性效应只改变它的传播速度的大小. 这与张绍东等的二维计算结果相吻合 [1].

以上的检验和比较表明, 应用 ADI 格式模拟重力波在三维可压大气中的非线性传播, 其计算过程是长期稳定的, 计算精度是高的, 其结果能够反映重力波非线性传播的基本特征: 重力波波包保持较好的形状向上传播, 波相位向下, 随着传播高度的增加, 波包范围逐渐增大, 波相关扰动速度及垂直运动的振幅逐渐增加, 重力波能量集中在一定的范围内, 随传播时间的延长, 其分布也趋向高处. 我们应用 ADI 格式模拟重力波的非线性传播是成功的. ADI 格式可以作为模拟三维重力波在可压大气中非线性传播得好的算法格式. 该格式在求解三维问题时, 由于求逆矩阵阶数的增加, 计算量较二维问题的增加是显著的, 要采取一定的方法来克服这一问题才能很好地应用该格式.

4　结　　论

本文首先介绍了求解三维可压非静止大气中重力波非线性传播的数值模型的交替方向隐格式 (ADI), 并选取了适当的模型参数, 应用该格式进行了计算. 从计算结果分析, 在图 3 中我们可以看到, 重力波波包在经过了几个周期后, 仍能够在保持很好的形状下稳定地向上传播, 内点和边界保持稳定, 波相关扰动速度及垂直运动的振幅随波包传播高度的增加而增长. 将计算结果同重力波线性理论相比较, 发现模拟的波包能量能够沿着线性理论射线很好地传播, 只不过在水平的两个方向上, 水平风的传播速度略小于线性理论值. 同时对计算结果中波相关水平风风速、相位及波相关能量的分析表明, 该格式的三维模拟能够实现二维重力波非线性传播模拟 [1] 所得到的结果. 这说明应用 ADI 格式求解三维可压非静止大气中重力波非线性传播的数值模型是成功的, 应用 ADI 格式来求解三维重力波非线性传播数值模型是完全可行的. 同时也进一步验证在二维模拟 [1] 中已得的结论: 非线性方程能很好地描述重力波的传播, 非线性只对传播速度有些影响.

参　考　文　献

[1] Zhang Shaodong, Yi Fan. A numerical study of nonlinear propagation of a gravity-wave packet in compressible atmosphere. *J. Geophys. Res.*, 1999, **104**:14 261—14 270

[2] 刘式适, 刘式达. 大气动力学. 北京大学出版社, 1991

[3] 傅竹风, 胡友秋. 空间等离子体数值模拟. 安徽科学技术出版社, 1995

[4] 张绍东, 易帆等. 极区中层惯性重力波的 VHF 雷达观测. 空间科学学报, 1995, **15**(2):156—163

[5] 张绍东, 易帆等. 极区中层惯性重力波 VHF 雷达观测的统计特征. 空间科学学报, 1996, **16**(2):152—158

[6] 张绍东, 易帆等. 极区中层惯性重力波临界层的 VHF 雷达观测. 空间科学学报, 1996, **16**(3):227—232

[7] Vincent R A. Planetary and gravity waves in the mesosphere and low thermosphere. *Adv. Space Res.*, 1990, **10**:93—101

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

A STUDY OF NONLINEAR PROPAGATION OF 3D GRAVITY-WAVE PACKETS IN A COMPRESSIBLE ATMOSPHERE BY USING ADI SCHEME

YUE Xianchang YI Fan

(*Department of Radio Science and Technology, Wuhan University,* 430072)

Abstract

By using an Alternative-Direction-Implicit (ADI) scheme, a numerical model for nonlinear propagation of gravity-wave packets in a three-dimensional compressible atmosphere is solved. Results of numerical simulation show that after several periods, the gravity-wave packets propagate steadily upward and keep its shape well. The interior points and boundaries of the calculating region are stable. During the propagation the amplitude of wave-associated perturbation velocities increase with the increasing height. This shows that ADI scheme is reliable for simulating the nonlinear propagation of gravity-wave packets in a three-dimensional compressible atmosphere. From the results, It's also found that under nonlinear condition, a gravity wave packet is still able to keep some characterizations as under linear propagation. The nonlinear effect mainly impacts the propagation velocity of gravity-wave packets.

Key words Gravity-wave, Nonlinear effect, Alternative Direction Implicit (ADI)

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com