0254-6124/2012/32(2)-197–07 *Chin. J. Space Sci.* 空间科学学报

Hou Tianxiang, Ji Zhen. Modified two dimensional third-order semi-discrete central-upwind scheme. *Chin. J. Space Sci.*, 2012, **32**(2): 197-203

改进的二维三阶半离散中心迎风格式 *

侯天相[1] 纪 珍[2,3]

1(中国气象局培训中心 北京 100081)

2(中国科学院空间科学与应用研究中心 空间天气学国家重点实验室 北京 100190)

3(中国科学院研究生院 北京 100049)

摘 要 对二维三阶半离散中心迎风格式中的权函数给出了简化改进. 在保持格式精度的基础上, 改进后的权函数在二维情况下具有更加简单直接的结构而且严格非负. 该改进方法得到的格式仍然具有半离散中心迎风格式的优点, 同时保持了重构函数的非振性. 时间离散采用保持强稳定性的三阶 Runge-Kutta 方法, 并利用四阶 Lax-Wendroff (L-W) 格式计算磁流体算例中的磁场散度. 用该修正格式计算了二维磁流体数值算例, 得到高精度无振荡的结果, 验证了此方法的有效性.

关键词 非振高阶格式, 重构, 中心迎风格式

中图法分类号 P 353

Modified Two Dimensional Third-order Semi-discrete Central-upwind Scheme

HOU Tianxiang[1] JI Zhen[2,3]

1(*China Meteorological Administration Training Centre, Beijing* 100081)

2(*State Key Laboratory of Space Weather, Center for Space Science and Applied Research, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190)

3(*Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049)

Abstract The semi-discrete central-upwind scheme is a new Godunov type numerical method which is developed in 1990s. The scheme is widely used in the computational fluid dynamics and its advantages include the simple calculation process, the high calculation precision and so on. But for the third-order scheme, the positivity of the weight function and the non-oscillation of the WENO type reconstruction function in every direction cannot be preserved in two dimensional problems. In this article, a simple, direct modification is taken to the weight function of the two dimensional third-order semi-discrete central-upwind scheme. The modified weight function will keep the positivity all the time while the accuracy of the semi-discrete central-upwind method is preserved. The revised scheme still has the advantages of central-upwind schemes and it keeps the non-oscillation of

* 国家自然科学基金项目 (40904050, 40874077) 和国家重点实验室专项基金共同资助

2011-01-12 收到原稿, 2011-11-17 收到修定稿

E-mail: zji@spaceweather.ac.cn

reconstruction. To explore the potential capability of application of this reformation of weight function, two Magnetohydrodynamics (MHD) problems are simulated. In simulations, the third order Runge-Kutta method is used to solve the time evolution and the divergence of magnetic field was calculated by fourth-order Lax-Wendroff (L-W) scheme. All the numerical results demonstrate the modified scheme can solve the MHD equations stably, get high resolution and non-oscillatory results, keep the positivity of the weight function and the reconstruction is non-oscillatory in each direction.

Key words Non-oscillatory high-order scheme, Reconstruction, Central-upwind scheme

0 引言

求解双曲型守恒律的数值方法有很多, 其中 Godunov 类型格式是非常重要的一类. Godunov 类型格式是一种投影–演化的方法, 根据投影方式的不同可以分为中心格式和迎风格式. 与传统迎风格式如 MUSCL 格式相比, 中心格式基于交错网格, 构造简单, 不需要精确或者近似 Riemann 求解器, 避免了进行复杂耗时的特征分解过程, 但其数值耗散过大, 导致分辨率相对较差, 可能因此高阶中心格式发展缓慢, 直到迎风格式发展相对成熟时, 中心格式仍停留在一阶精度. 在 1990 年 Nessyahu 和 Tadmor[1] 将 LxF 格式推广到全离散二阶中心格式 (NT 格式) 后, 各类高阶中心差分格式相继被提出. 由于采用交错网格, 全离散格式在边界处理上存在一定的困难. 另外, 因为中心格式的数值粘性与 $(\Delta x)^{2r}/\Delta t$ 成比例 (这里 r 为格式的阶数), 所以在时间步长过小或计算时间过长时, 全离散格式会产生较大的数值耗散.

为了克服全离散格式的上述缺点, 高分辨率半离散中心、半离散中心迎风格式被相继提出. 传统中心交错格式是在固定的空间步长 Δx 上对Rimann 扇进行积分近似, 而半离散方法在求解过程中, 为了更准确利用局地波速信息, 采用在一个更小的、与时间步长有关的非光滑区域上对 Riemann 扇进行积分近似的方法, 利用波传播的最大局地波速, 精确估计 Riemann 扇的宽度, 得到非交错网格上的全离散格式. 1999 年, Kurganov 和 Tadmor[2−3] 首次提出用高精度中心差分格式求解双曲型守恒律以及对流扩散方程, 该格式的数值粘性与 $O(\Delta x^{2r-1})$ 成比例, 与时间步长不再相关. 当 $\Delta t \to 0^+$ 时, 格式具有半离散形式, 从而转化为求解常微分方程, 即二阶半离散中心格式. 之后, Kurganov 分别和 Tadmor[4] 及 Petrova[5] 构造了两种类似的三阶半离散中心方法. 为了进一步提高格式性能, Kurganov 等 [6] 又将半离散中心格式推广为半离散中心迎风格式. 通过引入对单侧局地波速的估计, 考虑波传播的方向, 使得格式具有了迎风的性质. 这一格式既具有中心格式优点又具有迎风特性, 对间断的分辨率高, 数值耗散较小. Bryson 等 [7−12] 将半离散方法推广到各种有源项问题, 而且还通过构造不同的重构函数将格式的精度提高到四阶, 甚至五阶.

半离散中心格式以及半离散中心迎风格式在构造过程中需要分段多项式重构函数. 一般情况下, 半离散中心格式及半离散中心迎风格式的精度和无振荡性是由分段重构决定的 [4,13−14]. 在高精度格式的各种无振荡重构中, WENO 重构 [15] 与中心 WENO 重构 [5,16] 较为典型. WENO 类型的重构方法是将各个备选模板上的插值多项式进行凸组合, 根据模板上数值解的光滑程度选取不同的权值, 所以在重构过程中权函数 θ 的选择需满足一些条件, 例如 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. 半离散中心迎风格式在二维情况下, 由于采用二元二次多项式进行重构, 与一维相比, 多出另一方向的一项, 重构所依据模板的插值多项式有所变化从而影响权函数的非负性.

本文将二维重构函数中各有关量的定义进行适当修改, 从而得到严格非负的权函数和在各方向均无振荡的重构多项式, 以此重构方法与半离散中心迎风数值通量结合得到新的修正方法. 最后用算例验证了本方法的有效性、稳定性、无振荡性及高分辨率的特性. 三阶半离散格式要求时间离散至少为三阶, 所以本文的算例中使用了三阶 Runge-Kutta 时间迭代方法来保证该方法的稳定性.

1 三阶半离散中心迎风格式重构方法

1.1 二维半离散中心迎风格式

考虑守恒律方程组:

$$u_{\mathrm{t}} + \nabla_X f(u) = 0, \quad X \in R^2,$$

二维情况下定义均匀网格

$$x_j = j\Delta x, \qquad y_k = k\Delta y,$$

$$x_{j\pm\frac{1}{2}} = \Big(j \pm \frac{1}{2}\Big)\Delta x,$$

$$y_{k\pm\frac{1}{2}} = \Big(\pm\frac{1}{2}\Big)\Delta y, \qquad t^n = n\Delta t,$$

其中, Δt 和 $\Delta x, \Delta y$ 分别表示时间步长, x 与 y 方向上的空间网格间隔, $x_j, y_k, x_{j\pm\frac{1}{2}}, y_{k\pm\frac{1}{2}}$ 代表点 (j,k) 和点 $\Big(j\pm\frac{1}{2}, k\pm\frac{1}{2}\Big)$ 的坐标值. 公式

$$\bar{u}_j^n = \frac{1}{\Delta x\Delta y}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}\int_{y_{k-\frac{1}{2}}}^{y_{k+\frac{1}{2}}} p_{j,k}^n(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

用来计算 $t = t^n$ 时刻 $u(x)$ 在

$$I_{j,k} = [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}] \times [y_{k-\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}]$$

上的均值 $\bar{u}_j^n$.

根据全离散中心迎风格式, 当时间 $t \to 0$ 时, 就得到了半离散中心迎风格式的微分形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{u}_{j,k}(t) = -\frac{H^x_{j+\frac{1}{2},k}(t) - H^x_{j-\frac{1}{2},k}(t)}{\Delta x} - \frac{H^y_{j,k+\frac{1}{2}}(t) - H^y_{j,k-\frac{1}{2}}(t)}{\Delta y}, \tag{1}$$

其中,

$$\begin{aligned}
H^x_{j+\frac{1}{2},k} =& \frac{a^+_{j+\frac{1}{2},k}}{6(a^+_{j+\frac{1}{2},k} - a^-_{j+\frac{1}{2},k})}\cdot \\
& \big[f(u^{\mathrm{NE}}_{j,k}) + 4f(u^{\mathrm{E}}_{j,k}) + f(u^{\mathrm{SE}}_{j,k})\big] - \\
& \frac{a^-_{j+\frac{1}{2},k}}{6\Big(a^+_{j+\frac{1}{2},k} - a^-_{j+\frac{1}{2},k}\Big)}\cdot \\
& \big[f(u^{\mathrm{NW}}_{j+1,k}) + 4f(u^{\mathrm{W}}_{j+1,k}) + f(u^{\mathrm{SW}}_{j+1,k})\big] + \\
& \frac{a^+_{j+\frac{1}{2},k}a^-_{j+\frac{1}{2},k}}{6(a^+_{j+\frac{1}{2},k} - a^-_{j+\frac{1}{2},k})}\cdot \\
& \big[u^{\mathrm{NW}}_{j+1,k} - u^{\mathrm{NE}}_{j,k} + 4(u^{\mathrm{W}}_{j+1,k} - u^{\mathrm{E}}_{j,k}) + \\
& u^{\mathrm{SW}}_{j+1,k} - u^{\mathrm{SE}}_{j,k}\big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^y_{j,k+\frac{1}{2}} =& \frac{b^+_{j,k+\frac{1}{2}}}{6(b^+_{j,k+\frac{1}{2}} - b^-_{j,k+\frac{1}{2}})}\cdot \\
& \big[g(u^{\mathrm{NW}}_{j,k}) + 4g(u^{\mathrm{N}}_{j,k}) + g(u^{\mathrm{NE}}_{j,k})\big] - \\
& \frac{b^-_{j,k+\frac{1}{2}}}{6(b^+_{j,k+\frac{1}{2}} - b^-_{j,k+\frac{1}{2}})}\cdot \\
& \big[g(u^{\mathrm{SW}}_{j,k+1}) + 4g(u^{\mathrm{S}}_{j,k+1}) + g(u^{\mathrm{SE}}_{j,k+1})\big] + \\
& \frac{b^+_{j,k+\frac{1}{2}}b^-_{j,k+\frac{1}{2}}}{6(b^+_{j,k+\frac{1}{2}} - b^-_{j,k+\frac{1}{2}})}\cdot \\
& \big[u^{\mathrm{SW}}_{j,k+1} - u^{\mathrm{NW}}_{j,k} + 4(u^{\mathrm{S}}_{j,k+1} - u^{\mathrm{N}}_{j,k}) + \\
& u^{\mathrm{SE}}_{j,k+1} - u^{\mathrm{NE}}_{j,k}\big],
\end{aligned}$$

$f(u^{\mathrm{E}}_{j,k})$, $f(u^{\mathrm{NE}}_{j,k})$, $f(u^{\mathrm{SE}}_{j,k})$ 分别代表点 (j,k) 处沿 x 轴以及两个对角线正方向的流通量, $f(u^{\mathrm{W}}_{j+1,k})$, $f(u^{\mathrm{NW}}_{j+1,k})$, $f(u^{\mathrm{SW}}_{j+1,k})$ 为点 $(j+1,k)$ 处沿 x 轴以及两个对角线负方向的流通量. $g(u^{\mathrm{N}}_{j,k})$, $g(u^{\mathrm{NW}}_{j,k})$, $g(u^{\mathrm{NE}}_{j,k})$ 分别代表点 (j,k) 处沿 y 轴以及两个对角线正方向的流通量, $g(u^{\mathrm{S}}_{j,k+1})$, $g(u^{\mathrm{SW}}_{j,k+1})$, $g(u^{\mathrm{SE}}_{j,k+1})$ 分别代表点 $(j,k+1)$ 处沿 y 轴以及两个对角线负方向的流通量. 公式中各个 u 的定义为

$$\begin{aligned}
& u_{j,k} = p^n_{j,k}(x_j, y_k), \quad u^{\mathrm{N}}_{j,k} = p^n_{j,k}(x_j, y_{k+\frac{1}{2}}), \\
& u^{\mathrm{S}}_{j,k} = p^n_{j,k}(x_j, y_{k-\frac{1}{2}}), \quad u^{\mathrm{E}}_{j,k} = p^n_{j,k}(x_{j+\frac{1}{2}}, y_k), \\
& u^{\mathrm{W}}_{j,k} = p^n_{j,k}(x_{j-\frac{1}{2}}, y_k), \quad u^{\mathrm{NE}}_{j,k} = p^n_{j,k}(x_{j+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}), \\
& u^{\mathrm{NW}}_{j,k} = p^n_{j,k}(x_{j-\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}), \quad u^{\mathrm{SE}}_{j,k} = p^n_{j,k}(x_{j+\frac{1}{2}}, y_{k-\frac{1}{2}}), \\
& u^{\mathrm{SW}}_{j,k} = p^n_{j,k}(x_{j-\frac{1}{2}}, y_{k-\frac{1}{2}}),
\end{aligned}$$

分别代表点 (j,k) 处的值以及沿 x, y 轴和两个对角线正负方向的 u 值, $u^{\mathrm{NW}}_{j+1,k}$, $u^{\mathrm{W}}_{j+1,k}$, $u^{\mathrm{SW}}_{j+1,k}$, $u^{\mathrm{SW}}_{j,k+1}$, $u^{\mathrm{S}}_{j,k+1}$, $u^{\mathrm{SE}}_{j,k+1}$ 分别代表点 $(j+1,k)$ 及点 $(j,k+1)$处的三个方向的 u 值. $a^{\pm}_{j\pm\frac{1}{2},k}$ 和 $b^{\pm}_{j,k\pm\frac{1}{2}}$ 分别为 x 和 y 方向的左右向局地波速.

因为 Kurganov 三阶半离散中心迎风格式至少需要三阶精度的时间迭代, 因此这里采用了三步三阶龙克–库塔法

$$u^{(1)} = u^n + \Delta t^n C[u^n],$$

$$u^{(2)}=\frac{3}{4}u^n+\frac{1}{4}(u^{(1)}+\Delta t^n C[u^1]),$$
$$u^{(3)}=\frac{1}{3}u^n+\frac{2}{3}(u^{(2)}+\Delta t^n C[u^2]).$$

其中, $C[u^n]$ 为式 (1) 的右边部分.

1.2 三阶无振荡重构介绍

一维情况下, 假设已知 $t=t^n$ 时刻的平均值 $\bar{u}_j^n$, 根据文献 [4,6,15] 给出如下分段重构函数:

$$\bar{u}_j^n=\sum_j p_j^n(x)\chi_j(x),$$
$$p_j^n(x)=(1-\theta_j^n)L_j^n(x)+\theta_j^n q_j^n,\quad 0\leqslant\theta_j^n\leqslant 1. \tag{2}$$

其中, χ_j 为 $I_j=[x_{j-\frac{1}{2}},x_{j+\frac{1}{2}}]$ 上的特征函数, $p_j^n(x)$ 为凸二次多项式, 由分段插值函数 $L_j^n(x)$ 和抛物线函数 q_j^n 构成.

$$L_j^n(x)=\bar{u}_j^n+s_j^n(x-x_j),$$
$$s_j^n=\min\ \mathrm{mod}\Big(\frac{\bar{u}_j^n-\bar{u}_{j-1}^n}{\Delta x},\frac{\bar{u}_{j+1}^n-\bar{u}_j^n}{\Delta x}\Big).$$

定义

$$\Delta_\pm u(x)=\pm\frac{u(x\pm\Delta x)-u(x)}{\Delta x},$$
$$\Delta_0 u(x)=\frac{u(x+\Delta x)-u(x-\Delta x)}{2\Delta x},$$

那么

$$q_j^n(x)=\Big(\bar{u}_j^n-\frac{(\Delta x)^2}{24}\Delta_+\Delta_-\bar{u}_j^n\Big)+$$
$$\Delta_0\bar{u}_j^n(x-x_j)+\frac{1}{2}\Delta_+\Delta_-\bar{u}_j^n(x-x_j)^2. \tag{3}$$

权函数 θ_j^n 为

$$\theta_j^n=\begin{cases}\min\Big\{\frac{M_{j+\frac{1}{2}}^n-L_j^n(x_{j+\frac{1}{2}})}{M_j^n-L_j^n(x_{j+\frac{1}{2}})},\frac{m_{j-\frac{1}{2}}^n-L_j^n(x_{j-\frac{1}{2}})}{m_j^n-L_j^n(x_{j-\frac{1}{2}})},1\Big\}, & \\ \qquad\qquad \bar{u}_{j-1}^n<\bar{u}_j^n<\bar{u}_{j+1}^n; & \\ \min\Big\{\frac{M_{j-\frac{1}{2}}^n-L_j^n(x_{j-\frac{1}{2}})}{M_j^n-L_j^n(x_{j-\frac{1}{2}})},\frac{m_{j+\frac{1}{2}}^n-L_j^n(x_{j+\frac{1}{2}})}{m_j^n-L_j^n(x_{j+\frac{1}{2}})},1\Big\}, & \\ \qquad\qquad \bar{u}_{j-1}^n>\bar{u}_j^n>\bar{u}_{j+1}^n; & \\ 1, \qquad\qquad \text{其他.} & \end{cases} \tag{4}$$

其中,

$$M_j^n=\max\Big\{q_j^n\Big(x_{j+\frac{1}{2}}\Big),q_j^n\Big(x_{j-\frac{1}{2}}\Big)\Big\},$$
$$m_j^n=\min\Big\{q_j^n\Big(x_{j+\frac{1}{2}}\Big),q_j^n\Big(x_{j-\frac{1}{2}}\Big)\Big\},$$

$$M_{j\pm\frac{1}{2}}^n=\max\Big\{\frac{1}{2}\Big[L_j^n\Big(x_{j\pm\frac{1}{2}}\Big)+L_{j\pm1}^n\Big(x_{j\pm\frac{1}{2}}\Big)\Big],q_{j\pm1}^n\Big(x_{j\pm\frac{1}{2}}\Big)\Big\},$$
$$m_{j\pm\frac{1}{2}}^n=\min\Big\{\frac{1}{2}\Big[L_j^n\Big(x_{j\pm\frac{1}{2}}\Big)+L_{j\pm1}^n\Big(x_{j\pm\frac{1}{2}}\Big)\Big],q_{j\pm1}^n\Big(x_{j\pm\frac{1}{2}}\Big)\Big\}. \tag{5}$$

式 (2)~(5) 构成了基本的三阶无振荡重构, 其性质证明详见文献 [6].

1.3 权函数的修正方法

二维情况下, 重构多项式为二元二次多项式. 在 x, y 平面计算区域内以 j, k 分别表示 x 和 y 方向的坐标点下标. 考虑 $y\equiv y_k$ 直线上的点, 将平均值 $\bar{u}_{j,k}$ 简单记为 $\bar{u}_j$. 因为 $y\equiv y_k$, 故多项式具有以下形式:

$$q_{j,k}^n(x,y_k)=\bar{u}_j^n-\frac{1}{24}(\bar{u}_{j+1}^n-2\bar{u}_j^n+\bar{u}_{j-1}^n)-$$
$$\frac{1}{24}(\bar{u}_{j,k+1}^n-2\bar{u}_{j,k}^n+\bar{u}_{j,k-1}^n)+$$
$$\frac{1}{2}(\bar{u}_{j+1}^n-\bar{u}_{j-1}^n)\frac{(x-x_j)}{\Delta x}+$$
$$\frac{1}{2}(\bar{u}_{j+1}^n-2\bar{u}_j^n+\bar{u}_{j-1}^n)\frac{(x-x_j)^2}{(\Delta x)^2}.$$

用 $\Delta_k^{(j)}$ 代表上式等号右端的第二项 $\frac{1}{24}(\bar{u}_{j,k+1}^n-2\bar{u}_{j,k}^n+\bar{u}_{j,k-1}^n)$, 由式 (3) 可知, $q_{j,k}^n(x,y_k)=q_j^n(x)-\Delta_k^{(j)}$.

在网格 $I_j=[x_{j-\frac{1}{2}},x_{j+\frac{1}{2}}]$ 中, 将 $q_{j,k}^n(x,y_k)$ 代入式 (5), 得到 $M_{j,k}^n=M_j^n-\Delta_k^{(j)}$, $m_{j,k}^n=m_j^n-\Delta_k^{(j)}$. 下面定义半点处的 M,m, 有

$$M_{j\pm\frac{1}{2},k}^n=\max\Big\{\frac{1}{2}\Big[L_j^n\Big(x_{j\pm\frac{1}{2}}\Big)+L_{j\pm1}^n\Big(x_{j\pm\frac{1}{2}}\Big)\Big]-\Delta_k^{(j\pm1)},q_{j\pm1,k}^n\Big(x_{j\pm\frac{1}{2}},y_k\Big)\Big\},$$
$$m_{j\pm\frac{1}{2},k}^n=\min\Big\{\frac{1}{2}\Big[L_j^n\Big(x_{j\pm\frac{1}{2}}\Big)+L_{j\pm1}^n\Big(x_{j\pm\frac{1}{2}}\Big)\Big]-\Delta_k^{(j\pm1)},q_{j\pm1,k}^n\Big(x_{j\pm\frac{1}{2}},y_k\Big)\Big\}. \tag{6}$$

其中, L_j^n 定义不变, 依然为 $L_j^n(x)=\bar{u}_j^n+s_j^n(x-x_j)$. 按照这一定义存在下列关系:

$$M_{j\pm\frac{1}{2},k}^n=M_{j\pm\frac{1}{2}}^n-\Delta_k^{(j\pm1)},$$
$$m_{j\pm\frac{1}{2},k}^n=m_{j\pm\frac{1}{2}}^n-\Delta_k^{(j\pm1)}. \tag{7}$$

根据这些相关量的定义, 对权函数的定义也进行相应的修正, 即

$$\theta_j^n=\begin{cases}\min\left\{\dfrac{M^n_{j+\frac12,k}-L_j^n\left(x_{j+\frac12}\right)+\Delta_k^{(j+1)}}{M^n_{j,k}-L_j^n\left(x_{j+\frac12}\right)+\Delta_k^{(j)}},\right.\\ \qquad\left.\dfrac{m^n_{j-\frac12,k}-L_j^n\left(x_{j-\frac12}\right)+\Delta_k^{(j-1)}}{m^n_{j,k}-L_j^n\left(x_{j-\frac12}\right)+\Delta_k^{(j)}},1\right\},\\ \qquad\qquad \bar u^n_{j-1}<\bar u^n_j<\bar u^n_{j+1};\\ \min\left\{\dfrac{M^n_{j-\frac12,k}-L_j^n\left(x_{j-\frac12}\right)+\Delta_k^{(j-1)}}{M^n_{j,k}-L_j^n\left(x_{j-\frac12}\right)+\Delta_k^{(j)}},\right.\\ \qquad\left.\dfrac{m^n_{j+\frac12,k}-L_j^n\left(x_{j+\frac12}\right)+\Delta_k^{(j+1)}}{m^n_{j,k}-L_j^n\left(x_{j+\frac12}\right)+\Delta_k^{(j)}},1\right\},\\ \qquad\qquad \bar u^n_{j-1}>\bar u^n_j>\bar u^n_{j+1};\\ 1, \qquad\qquad 其他.\end{cases}\tag{8}$$

将式 (6) 和式 (7) 代入式 (8), 便得到了与式 (4) 形式相同的权函数. 这一权函数经数学证明, 具有严格的非负性. 需要特别指出的是, 虽然式 (8) 所得到的权函数与式 (4) 形式上完全一致, 但是其中各个相关量的取值均不同, 例如 q_j^n 在前者中为 $q_j^n(x)$, 后者中则为 $q^n_{j,k}(x,y_k)=q_j^n(x)-\Delta_k^{(j)}$. 为了保证重构函数的非振性, 对得到的 θ_j^n 进一步修正, 当 $\bar u_{j-2}>\bar u_{j-1}<\bar u_j$ 或者 $\bar u_{j-2}<\bar u_{j-1}>\bar u_j$, 定义 $\theta^n_{j-1}=0$. 因为在数学证明中没有使用 θ_j^n 的具体形式, 故而将 θ_j^n 定义成 $[0,1]$ 中任意一个常数, 并不会影响重构函数的非振性. 由于数值证明过程过于复杂, 这里就不再详述. 由式 (1)~(3) 及式 (6)~(8) 便构成了修正后的半离散中心迎风格式.

2 数值算例及结果分析

利用式 (1)~(3) 以及式 (6)~(8) 所描述的半离散中心迎风格式 (修正方法), 以及文献 [5−6] 中的三阶半离散中心格式 (KP 方法), 求解文献 [20] 中的两个二维数值算例, 并比较结果. 所有算例均采用无量纲化参数进行计算.

2.1 Rotor 问题

该算例的计算区域为单位正方形 $0<x,\ y<1$, 网格总数为 200×200. 根据文献 [17−18] 给出如下初始条件:

$$\rho=\begin{cases}10.0, & r<0.1;\\ 1+9f(r), & 0.1<r<0.115;\\ 1.0, & 其他.\end{cases}$$

其中, $r=\sqrt{(x-0.5)^2+(y-0.5)^2}$,

$$f(r)=\frac{23-200r}{3}.$$

令参数 $r_0=0.1$, $v_0=2.0$, 其他变量满足如下条件:

$$\rho u=\begin{cases}-(y-0.5)v_0/r_0, & r<0.1;\\ -(y-0.5)f(r)v_0/r, & 0.1<r<0.115;\\ 0.0, & 其他.\end{cases}$$

$$\rho v=\begin{cases}(x-0.5)v_0/r_0, & r<0.1;\\ (x-0.5)f(r)v_0/r, & 0.1<r<0.115;\\ 0.0, & 其他.\end{cases}$$

这里, 初始热压 $p=1.0$; 初始磁场 $B_x=5/\sqrt{4\pi}$, $B_y=0$; 绝热系数 $\gamma=1.4$; 边界为自由边条件. 由于初始密度、速度的梯度造成等离子体团和磁场在区域内旋转, 压强在中心部分降到较低值. 通常在数值计算中, 会由于中心区域出现负压强导致计算失败, 这里用该算例验证修正方法对于低压的处理效果. 在相同等值线数目条件下, 图 1~3 给出了 $t=0.15$ 时刻的压强、密度和 x 方向的磁场等值线.

根据图 1~3 可以看出, KP 方法和修正方法都可以很好地捕捉激波, 清楚显示中心的低压区域, 均没有出现负的密度或压强, 整个外激波轮廓光滑对称, 能够捕捉到精细的磁场结构. 由图 1 可以看到, 修正方法相对于 KP 方法, 计算结果的压力结构更为光滑

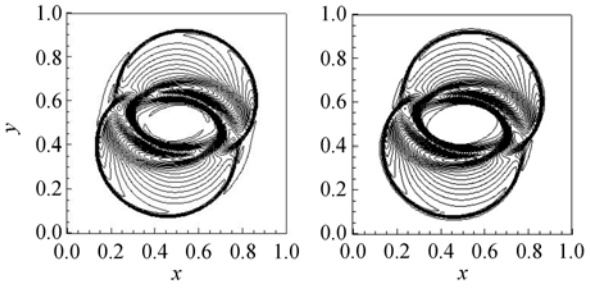

图 1 $t=0.15$ 时 KP 方法和修正方法得到的压强

Fig. 1 Pressure by KP method and modified scheme at $t=0.15$

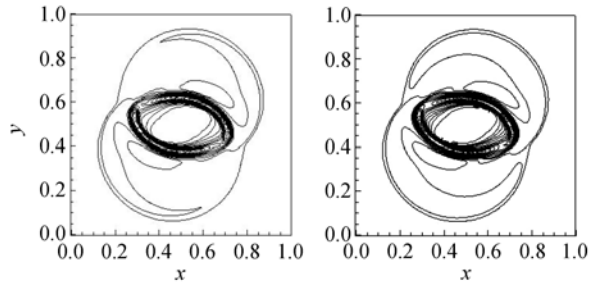

图 2 $t = 0.15$ 时 KP 方法和修正方法得到的密度

Fig. 2 Density by KP method and modified scheme at $t = 0.15$

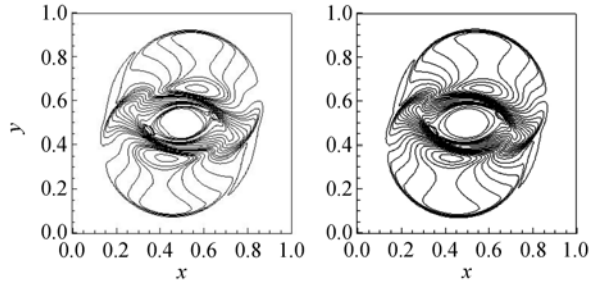

图 3 $t = 0.15$ 时 KP 方法和修正方法得到的 x 方向磁场

Fig. 3 Magnetic field by KP method and modified scheme in x direction at $t = 0.15$

清晰, 中心区域低压区没有出现间断面的振荡. 同样在图 2 中, KP 方法的结果在低压区有明显的振荡, 而本文中的修正方法则没有出现相同的振荡, 并且中心低压区的外轮廓更接近于理论上的椭圆形. 图 3 中两种方法的磁场结果较为接近, 这是由于两种方法中都采用了四阶 L-W 方法处理磁场散度, 精度相差不大. 但 KP 方法的中心区域出现明显的变形, 而修正方法呈现椭圆形. 以上结果证明修正方法的确保持了 KP 格式的精度, 能够得到计算精度较高的结果, 修正的重构函数在各个方向上是非振的, 同时修正方法可以很好地处理低压问题, 在抑制振荡方面明显优于 KP 格式.

2.2 爆炸波问题

根据文献 [17, 19], 计算区域为 $[-0.5, 0.5] \times [-0.75, 0.75]$, 网格总数为 200×200. 计算时间为 0.02, 此时波阵面并没有传出计算区域, 因此取边界条件为周期边条件, 初始状态为

$$(\rho, v_x, v_y, v_z, B_x, B_y, B_z) = \left(1, 0, 0, 0, \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right).$$

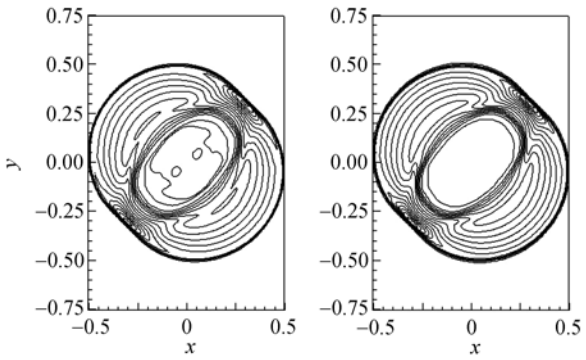

图 4 $t = 0.02$ 时 KP 方法和修正方法得到的密度

Fig. 4 Density by KP method and modified scheme at $t = 0.02$

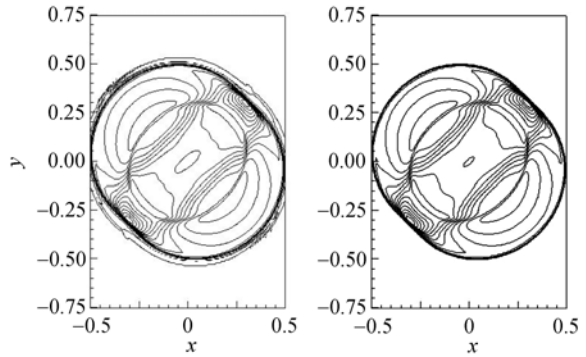

图 5 $t = 0.02$ 时 KP 方法和修正方法得到的压强

Fig. 5 Pressure by KP method and modified scheme at $t = 0.02$

在 (0, 0) 处有一个半径为 0.1 的等离子体团, 当 $r > 0.1$ 时 $p = 0.1$, $r < 0.1$ 时 $p = 10.0$. 图 4 和图 5 分别给出了 $t = 0.02$ 时刻的密度及压强等值线.

初始条件能够演化为一个向外传播的圆形爆炸波以及一个向内传播的稀疏波. 该算例具有低 β 和强激波, 在数值模拟中容易出现压强为负的情况, 这里用该算例验证修正方法对于强间断处理的有效性, 图 4 和图 5 表明, 两种方法都得到了向外传播的强爆炸波以及中心的低密度区, 所得的等值线图对称.

两种方法的结果都显示出中心的低密度区在强磁场的作用下演化为长轴平行于背景磁场的椭圆形, 在椭圆区的边界捕捉到清晰的接触间断, 并且爆炸波沿垂直磁力线方向传播较快, 沿平行磁力线方向传播较慢. 但是, 图 4 中 KP 方法的结果在爆炸波附近及中心的低压与低密度区都出现了细微的振荡, 图 5 中 KP 方法的压强结果在强激波附近振荡更为剧烈,

而相同等值线数目条件下, 在修正方法的结果中这些振荡消失, 平滑性较高. 这一算例说明修正方法保证了压强和密度始终为正数, 具有较高的稳定性.

3 结论

本文中改进的三阶半离散中心迎风格式, 简化了原有权函数的计算, 严格保证了权函数的非负性, 保持了重构函数在各个方向的无振荡性质. 通过两个分别关于低压处理和强激波处理的磁流体问题, 验证了该修正方法求解磁流体问题的有效性和稳定性.

为了验证修正方法的稳定性、有效性以及无振荡性, 本文分别对原有的 KP 方法与修正方法计算 Rotor 问题和爆炸波问题的结果进行了比较, 给出相应的密度、压强、磁场的图形结果, 证明了修正方法本身具有较高的稳定性, 能够同时求解低压以及强激波间断, 并且能够持续地进行计算, 得到正确的模拟结果. 从数值算例的结果可以看出, 本文的修正方法可以进一步降低间断及低压区域附近的振荡, 并且在磁流体力学中具有很好的稳定性和捕捉间断的能力, 对于低压区域、强间断区域的处理也具有高分辨率. 由此可知, 由于其高精度, 无振荡的特性, 这一改进方法可以进一步应用于空间等离子体问题, 例如磁重联问题等, 以得到更为精确的计算结果.

致谢 在本文的研究和撰写过程中, 中国科学院空间科学与应用研究中心冯学尚研究员提出了很多宝贵意见.

参考文献

[1] Nessyahu H, Tadmor E. Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws [J]. *J. Comput. Phys.*, 1990, **87**:408-463

[2] Kurganov A, Tadmor E. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection diffusion equations [J]. *J. Comput. Phys.*, 2000, **160**:241-282

[3] Kurganov A, Tadmor E. New high-resolution semi-discrete central schemes for Hamilton-Jacobi equations [J]. *J. Comput. Phys.*, 2000, **160**:720-742

[4] Kurganov A, Petrova G. Central Schemes and Contact Discontinuities [J]. *Math. Model. Numer. Anal.*, 2000, **34**:1259-1275

[5] Levy D, Puppo G, Russo G. A forth-order central WENO scheme for multidimensional hyperbolic systems of conservation laws [J]. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2002, **24**:480-506

[6] Kurganov A, Noelle S, Petrova G. Semidiscrete central-upwind schemes for Hyperbolic conservation laws and Hamilton-Jacobi equations [J]. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2001, **23**:707-740

[7] Bryson S, Levy D. High-order semi-discrete central-upwind schemes for multi-dimensional Hamilton-Jacobi equations [J]. *J. Comput. Phys.*, 2003, **189**:63-87

[8] Bryson S, Levy D. On the Total Variation of High-Order Semi-Discrete Central Schemes for Conservation Laws [J]. *J. Sci. Comput.*, 2006, **27**:163-175

[9] Abreu E, Pereira F, Ribeiro S. Central schemes for porous media flows [J]. *Comput. Appl. Math.*, 2009, **28**:87-110

[10] Greenshields C J, Weller H G, Gasparini L, Reese J M. Implementation of semi-discrete, non-stagged central schemes in a colocated, polyhedral, finite volume framework, for high-speed viscous flows [J]. *Int. J. Numer. Meth. Fluids.*, 2009, **63**:1-21

[11] Dehghan M, Jazlanian R. On the total variation of a third-order semi-discrete central scheme for 1D conservation laws [J]. *J. Vib Contral.*, 2011, **17**:1348-1358

[12] Peer A A I, Gopaul A, Dauhoo M Z, Bhuruth M. A new fourth-order non-oscillatory central scheme for hyperbolic conservation laws [J]. *Appl. Numer. Math.*, 2008, **58**:674-688

[13] Kurganov A, Petrova G. A third-order semi-discrete genuinely multidimensional central scheme for hyperbolic conservation laws and related problems [J]. *Numer. Math.*, 2001, **88**:683-729

[14] Kurganov A, Levy D. A Third-Order Semi-Discrete Central Scheme for Conservation Laws and Convection-Diffusion Equations [J]. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2000, **22**:1461-1488

[15] Jiang G S, Wu C C. A high-order WENO finite difference scheme for the Equations of ideal magnetohydrodunamics [J]. *J. Comput. Phys.*, 1999, **150**:561-594

[16] Levy D, Puppo G, Russo G. Compact central WENO schemes for multidimeneional conservation laws [J]. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2000, **22**:656-672

[17] Toth G. The constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes [J]. *J. Comput. Phys.*, 2000, **161**:605-652

[18] Ziegler U. A central-constrained transport scheme for ideal magnetohydrodunamics [J]. *J. Comput. Phys.*, 2004, **196**:393-416

[19] Feng X S, Zhou Y F, Hu Y Q. A 3rd Order WENO GLM-MHD Scheme for Magnetic Reconnection [J]. *Chin. J. Space Sci.*, 2006, **26**:1-7

[20] Balsara D S. Multidimensional HLLE riemann solver, application to euler and magnetohydrodynamic flows [J]. *J. Comput. Phys.*, 2010, **229**:1970-1993