第16卷 第4期 空间科学学报 Vol.16, No.4
1996 年 10 月 CHINESE JOURNAL OF SPACE SCIENCE Oct., 1996

色散和耗散对 Alfvén 孤立波的影响 *

冯学尚 吕建永

(中国科学院空间科学与应用研究中心日球物理数值开放研究实验室，北京 100080)

摘 要

利用变数变换和解析积分的方法，分别找到了带色散项的 DNLS 方程和带耗散的 MKdV 方程的一类解析解，给出了存在孤立波的条件.

关键词 Alfvén 波，色散与耗散，孤立波

一、引 言

在流体力学、等离子体物理等非线性领域的研究中，不同介质中的非线性现象一直是人们研究的一个热点. 在这类非线性现象中，孤立波的产生是其中最有趣的分析领域之一. 在准静态近似的假设下，Rogister[1] 从等离子体动力论出发，推出了平行于磁场传播的 Alfvén 波长时间演化方程. 这就是著名的导数非线性薛定谔方程即 DNLS,

$$u_t+\beta(|u|^2u)_x+i\alpha u_{xx}=0. \tag{1}$$

式中，x 是波传播和背景磁场的方向，$u=(B_y+iB_z)/B_x$，是归一化到 B_x(常数)的横向波磁场，$\beta/C_A=C_i^2/4(C_i^2-C_s^2)$, ($C_A$, C_i, C_s 分别是 Alfvén 波速、中间横波速和声速)，$2\alpha/C_A=c/\omega_{pi}$ 是离子惯性色散长度.

在太阳风[2]、星际弓激波附近[3]、行星际激波[4] 和彗星[5] 中发现的有限振幅 Alfvén 波均可用 DNLS 方程描述. 所观测的波形式分布很广，从单一的圆偏振波到陡化的压缩波，其复杂的波包显然意味着非线性波的演化. 许多学者寻找了 DNLS 方程的 Alfvén 孤立波特解[6]，讨论了 Alfvén 波特性[7,8]. Wyller 等[9] 将耗散项作为一个小扰动，用扰动方法研究了扰动 DNLS 方程的孤立解；Hada 等[10] 采用 IST 方法模拟了带有耗散项的 DNLS 方程. 但具有色散项的 DNLS 尚无人讨论.

斜传播的 Alfvén 孤立波，在磁扰动与背景磁场的横向分量同级时可用 Kakutani 等[11] 推出的修正(三次方) KdV 方程 $u_t+\beta(|u|^2u)_x+\gamma u_{xxx}=0$ 描述. 显然 MKdV 方程不含耗散项.

非线性效应可产生越来越高的高次谐波，随着扰动的传播，扰动参数变化的剖面将逐渐变陡. 色散效应使得变陡过程在某个地方停止下来，最后形成孤立波. 如果耗散效应起作用，这种非线性波将成为激波. 基于这一物理思想，本文讨论了具有色散修正的 DNLS 和具有耗散修正的 MKdV 方程的解，给出了孤立波及其存在的解析表达式.

* 国家自然科学基金资助.

本文于 1995 年 8 月 16 日收到.

二、具有色散修正的 Alfvén 孤立波

色散效应对 Alfvén 孤立波的形成及形式有着重要的影响．在考虑色散效应后，DNLS 方程将变为

$$iu_t+\alpha u_{xx}+i\beta(|u|^2u)_x+i\gamma u_{xxx}=0. \tag{2}$$

其中，α 是耗散项系数，β 和 γ 分别是非线性相互作用项和色散项系数．Hirota 和 Satsauma[12] 曾讨论过方程(2)带 N 个波包的准确孤立子解．我们讨论边界条件在 $x\to\pm\infty$ 时 $u\to 0$ 的孤立波解．要指出的是，$\alpha=0$ 时该方程将变成描述 Alfvén 波斜传播的 MKdV 方程。

设稳态解形式为

$$u=u(x-\mu t)=u(\xi). \tag{3}$$

式中 μ 为波速(波包 / 传输速度)．将(3)式代入方程(2)，得

$$-i\mu u'+\alpha u''+i\beta(|u|^2u)'+i\gamma u'''=0, \tag{4}$$

上撇号代表 u 对 ξ 的微分．令 $u(\xi)=B(\xi)e^{i\theta(\xi)}$，从而 $u'=(B'+iB\theta')e^{i\theta}$，$u''=[(B''-B\theta'^2)+i(2B'\theta'+B\theta'')]e^{i\theta}$，代入方程(4)，由实部和虚部可分别求得

$$\gamma(B''-B\theta'^2)+\beta B^3-\mu B+\alpha B\theta'=0, \tag{5}$$

$$-\gamma(2B'\theta'+B\theta'')+\alpha B'=0. \tag{6}$$

求解耦合方程(5)和(6)，用 B 乘以(6)，然后在$(-\infty,\xi)$上积分，可得 $-\gamma B^2\theta'+\frac{\alpha}{2}B^2=0$．进而可得

$$\theta(\xi)=\frac{\alpha}{2\gamma}\xi+\theta_0. \tag{7}$$

式中 θ_0 为积分常数．

将(7)代入(5)式可推得

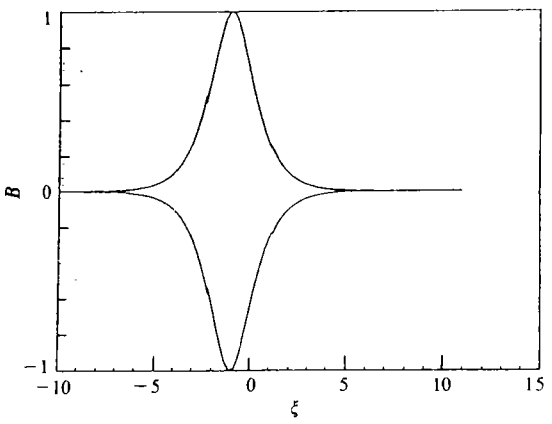


图 1　波包孤立子

Fig.1　Solitary profile of wave packet

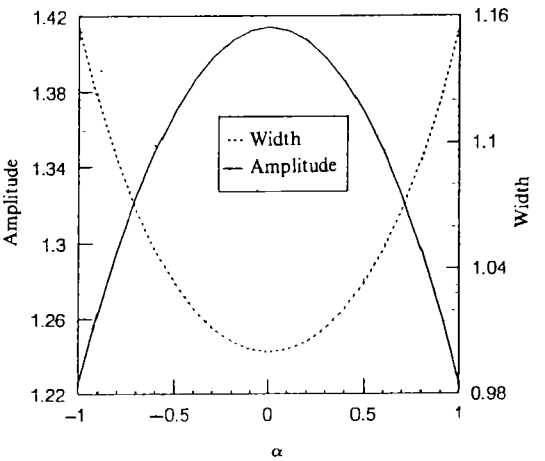


图 2　振幅和宽度随耗散系数 α 的变化($\beta=\gamma=1$)

Fig.2　Variation of amplitude and width according to the dissipative coeficient $\alpha(\beta=\gamma=1)$

$$B'' = \left(\frac{\mu}{\gamma} - \frac{\alpha^2}{4\gamma^2}\right)B - \frac{\beta}{\gamma}B^3. \tag{8}$$

积分(8)式可得

$$B(\xi) = \pm\sqrt{\frac{2\mu - \frac{\alpha^2}{2\gamma}}{\beta}}\ \mathrm{sech}\left[\sqrt{\left|\frac{\mu}{\gamma} - \frac{\alpha^2}{4\gamma^2}\right|}\ (\xi + \xi_0)\right], \tag{9}$$

ξ_0 为任意积分常数.

(9)式是典型的孤立子解，其波包孤立子的形状如图1所示. 与以往求得的许多孤立子解不同的是，它既存在压缩(上凸)型孤子解，又存在稀疏(下凹)型孤子解.

上述求解利用了 $\frac{2\mu}{\beta} - \frac{\alpha^2}{2\beta\gamma} > 0$ 这一假设，由此可知该孤立波存在的条件为

$$\beta > 0,\ \mu > \frac{\alpha^2}{4\gamma}; \tag{10}$$

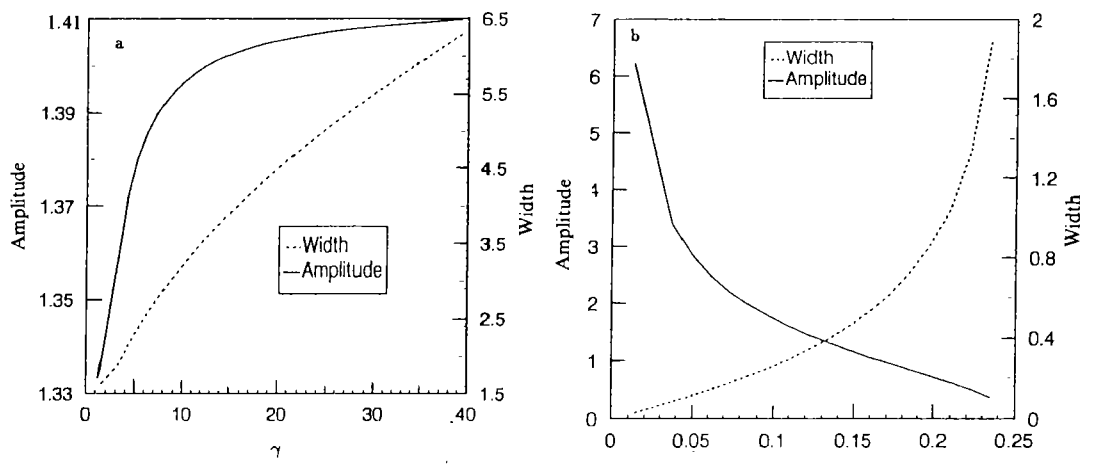
$$\beta < 0,\ \mu < \frac{\alpha^2}{4\gamma}. \tag{11}$$

孤立波振幅 A 和宽度 Δ 分别为

$$A = \sqrt{\frac{2\mu}{\beta} - \frac{\alpha^2}{2\beta\gamma}}; \tag{12}$$

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\left|\frac{\mu}{\gamma} - \frac{\alpha^2}{4\gamma^2}\right|}}. \tag{13}$$

由此可看出，该孤立波有如下特征:



(a) $\beta > 0$ (b) $\beta < 0$

图3 振幅和宽度随色散系数 γ 的变化($\alpha = \beta = 1$)

Fig.3 Variation of amplitude and width according to the dispersive coeficient $\gamma(\alpha = \beta = 1)$

(1) 孤立波振幅与其传播速度成正比．振幅越大，传播越快，是非线性效应的结果．

(2) $A\cdot\Delta=\sqrt{2\left|\frac{\gamma}{\beta}\right|}$，对于一定的 α,β,γ，振幅越大，宽度将越窄；振幅越小，宽度越大．

(3) 孤立波宽度与非线性项 β 无关，而振幅却随着 β 的增大而减小，二者成反比 ($\beta>0$ 时)．

如果固定 α,β,γ 中的两个参数，可求出振幅和宽度随第三个参数的变化．图 2 和图 3 分别给出了振幅和宽度随耗散系数 $\alpha(\beta=\gamma=1)$ 和色散系数 $\gamma(\alpha=\beta=1)$ 的变化曲线，可以看出该孤立波还有下述特征：

(4) 耗散项为零时，孤立波振幅最大，宽度最小．．耗散项的出现使孤立波振幅变小，宽度增大．

(5) 色散系数 γ 越大，在 $\beta>0$ 时振幅和宽度都将增大；但 $\beta<0$ 时，振幅变小而宽度增大．

三、具有耗散修正的 MKdV 方程的解析解

在磁扰动与背景磁场的横向分量同量级时，斜传播的 Alfvén 波可用 MKdV 方程来描述．如果考虑耗散修正效应，MKdV 方程变为

$$u_t-\eta u_{xx}+\beta(|u|^2u)_x+\gamma u_{xxx}=0, \tag{14}$$

其中 η 是阻尼耗散系数．实际上方程(14)也可看作 KdV－Burgers 修正方程．

仍用前一节所用的方法来寻找形式为 $u=u(\xi)(\xi=x-\mu t)$ 的行波解．将 $u=u(\xi)$ 带入(14)并积分得

$$-\mu u-\eta u'+\beta|u|^2u+\gamma u_{xx}=c. \tag{15}$$

c 是由边界条件决定的积分常数．

考虑实部和虚部相等的特殊情况，这时方程(15)变成

$$-\mu u-\eta u'+2\beta(\mathrm{Re}u)^2u+\gamma u_{xx}=c, \tag{16}$$

其中 Reu 表示 u 的实部．假设 Re$u=E(\xi)+b$，b 为待定实常数，代入(16)可得

$$(-\mu b+2\beta b^3-c)+(6\beta b^2-\mu)E+6\beta bE^2+2\beta E^3-\eta E'+\gamma E''=0. \tag{17}$$

取 b 为 $-\mu b+2\beta b^3-c=0$ 方程的根．

这样方程(17)变为

$$(6\beta b^2-\mu)E+6\beta bE^2+2\beta E^3-\eta E'+\gamma E''=0. \tag{18}$$

下面分三种情况讨论(18)的解：

1. $\gamma\neq0$, $\eta=0$

此时方程(14)就是 MKdV 方程，(18)式变为

$$(6\beta b^2-\mu)E+6\beta bE^2+2\beta E^3+\gamma E''=0. \tag{19}$$

当 $\frac{\mu-6\beta b^2}{\gamma}>0$ 时，积分(19)式可得到 MKdV 方程下述一个孤立波解：

$$E=\frac{4A}{e^{\sqrt{A}(\xi+\xi_0)}+(B^2-4AC)e^{-\sqrt{A}(\xi+\xi_0)}-2b}. \tag{20}$$

其中

$$A=\frac{\mu-6\beta b^2}{\gamma},\ B=-\frac{4\beta b}{\gamma},\ C=-\frac{\beta}{\gamma}.$$

2. $\gamma=0$, $\eta\neq 0$

此时方程(14)是高阶非线性 Burgers 方程:

$$u_t-\eta u_{xx}+\beta(|u|^2u)_x=0. \tag{21}$$

对应的方程(18)变为

$$(6\beta b^2-\mu)E+6\beta bE^2+2\beta E^3=\eta E'. \tag{22}$$

方程(22)经过复杂积分后，可得在满足 $B'^2-4A'C'>0$ 且 $B'=\pm 2\sqrt{B'^2-4A'C'}$ 时有下述隐式解:

$$\frac{4A'\left(2A'+\frac{3B'}{2E}\right)}{\left(2A'+\frac{B'}{2E'}\right)^3}=e^{2C'(\xi+\xi_0)}. \tag{23}$$

其中，$A'=\frac{2\beta}{\eta}$，$B'=\frac{6\beta b}{\eta}$，$C'=\frac{6\beta b^2-\mu}{\eta}$.

3. η, β 和 γ 均不为零

此时，可将 E' 写成 $E'=\alpha E(1-E^h)$, a 和 h 均为待定常数. 显然

$$E''=a^2E[1-(h+2)E^h+(h+1)E^{2h}]. \tag{24}$$

将 E' 和 E'' 代入方程(18)，可得

$$(6\beta b^2-\mu-\eta a+\gamma a^2)E+6\beta bE^2+[\eta a-(h+2)\gamma a^2]E^{h+1}+2\beta E^2+\gamma a^2(h+1)E^{2h+1}=0.$$

取 $h=1$，可推出

$$\beta+\gamma a^2=0; \tag{25}$$

$$6\beta b+\eta a-3\gamma a^2=0; \tag{26}$$

$$6\beta b^2-\mu-\eta a+\gamma a^2=0. \tag{27}$$

解(25)—(27)可得

$$a^2=-\frac{\beta}{\gamma},\ \mu=2\beta(1+3b+3b^2). \tag{28}$$

b, a, η 和 β 之间满足下述制约关系:

$$12\beta b+2\eta a+3\beta=0. \tag{29}$$

此时，积分方程 $E'=aE(1-E)$，可求得

$$E(\xi)=\frac{e^{a(\xi+\xi_0)}}{1+e^{a(\xi+\xi_0)}}.$$

因而方程(14)的解可写为

$$u(\xi)=\frac{e^{a(\xi+\xi_0)}}{1+e^{a(\xi+\xi_0)}}+b, \tag{30}$$

ξ_0 为积分常数.

综合上述三种情况的结果，带耗散项的 MKdV 方程的解与 KdV－Burgers 方程的解[14]非常类似.

值得指出的是，我们上面的讨论不仅适用于研究耗散对阿尔文波传播形式的影响，而且可用于讨论磁声波.

作者对魏奉思教授和宋礼庭教授的帮助与鼓励表示衷心的感谢.

参　考　文　献

[1] Rogister, G., *Phys. Fluids*, Vol.**14**, p. 2733, 1971.

[2] Burgala, L. F., *Rev. Geophys.*, Vol.**21**, p. 363, 1983.

[3] Greenstadt, E. W. et al., *J. Geophys. Res.*, Vol.**73**, p. 51, 1968.

[4] Kennel, C. F. et al., *J. Geophys. Res.*, Vol.**89**, p. 5419, 1984.

[5] Tsurutani, B. T. and Smith, E. J., *Geophys. Res. Lett.*, Vol.**13** p. 259, 1986.

[6] Kaup, D. J. and Newell, A., *J. Math. Phys.*, Vol.**19**, p. 798, 1978.

[7] Kennel, C. F. et al., *Phys. Fluids*, Vol.**31**, p. 1949, 1988.

[8] Tsurutani, B. T. et al., *Geophys. Res. Lett.*, Vol.**17**, p. 757, 1990.

[9] Wyller, J. and E. Mjølhus, *Physica D*, Vol.**13**, p. 234, 1984.

[10] Hada, T. et al., *Geophys. Res. Lett.*, Vol.**20**, p. 779, 1993.

[11] Kakutani, T. et al., *J. Phys. Soc. Japan*, Vol.**26**, p. 1305, 1969.

[12] Hirota, R., *J. Math. Phys.*, Vol.**14**, p. 805, 1973.

[13] 析孝康等，力学学报，第 **18** 卷，第 193 页，1986.

THE INFLUENCE OF DISPERSIVE AND DISSIPATIVE EFFECTS ON THE FORMATION OF ALFVEN SOLITON WAVES

Feng Xue－shang　　Lu Jian－yong

(*Lab. of Numerical Study for Heliospheric Physics, Center for Space Science and Applied Research, Academia Sinica, Beijing* 100080)

Abstract

Using some variable transformations and analytical integration, the analytical solitary wave solutions are obtained for the dispersive DNLS equation and dissipative MKdV equation, which describe the propagation of Alfvén waves in various plasma medium. Meanwhile, the existence conditions of soliton－like solutions are given.

Key words　Alfvén waves, Dispersive and dissipative effects, Solitons