

激光频率波动对空间引力波探测激光干涉测量的影响分析

刘宇^{1,2,3} 张玉珠² 彭晓东^{1,2,4} 赵梦园^{2,5}
杨震² 唐文林² 强丽娥²

1(中国科学院大学杭州高等研究院基础物理与数学科学学院 杭州 310024)

2(中国科学院国家空间科学中心 北京 101499)

3(中国科学院大学 北京 100049)

4(引力波宇宙太极实验室 杭州 310024)

5(西安财经大学信息学院 西安 710100)

摘要 空间引力波探测激光干涉测量系统噪声是决定探测任务成败的关键因素。激光频率噪声是最重要的噪声之一,有必要分析激光频率波动对测量结果的影响和各参数的变化对测量结果影响的百分比(重要程度)。由于在地面难以模拟空间环境,仿真分析是理想的实验手段。基于空间引力波探测激光干涉测量仿真系统,分析了自由运行激光器激光频率波动对其中的科学干涉仪、参考干涉仪和TM干涉仪模型造成的测量误差,并运用直接求导法和Sobol法两种灵敏度分析方法对三种干涉仪模型输出的影响和重要程度进行灵敏度分析。结果表明自由运行激光器激光频率波动造成的干涉仪测量结果变化远大于皮米量级。在本文实验条件下,测量光频率波动对三种干涉仪输出的重要程度分别为100%, 56%, 54%,参考光频率波动对三种干涉仪输出的重要程度分别为0%, 44%, 46%。

关键词 引力波探测, 空间激光干涉, 激光干涉仿真, 激光频率噪声, 灵敏度分析

中图分类号 P171.3

Analysis of the Influence and Importance of Laser Frequency Fluctuation on Laser Interference Simulation System for Space Gravitational Wave Detection

LIU Yu^{1,2,3} ZHANG Yuzhu² PENG Xiaodong^{1,2,4} ZHAO Mengyuan^{2,5}
YANG Zhen² TANG Wenlin² QIANG Li'e²

2024-01-31 收到原稿, 2024-02-26 收到修定稿

©The Author(s) 2025. This is an open access article under the CC-BY 4.0 License
(<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

1(School of Fundamental Physics and Mathematical Sciences, Hangzhou Institute for Advanced Study University of Chinese Academy of Sciences, Hangzhou 310024)

2(National Space Science Center, Chinese Academy of Sciences, Beijing 101499)

3(University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

4(Taiji Laboratory for Gravitational Wave Universe, Hangzhou 310024)

5(School of Information, Xi'an University of Finance and Economics, Xi'an 710100)

Abstract The laser interferometric measurement system for space gravitational wave detection is of great significance for detection tasks, the noise of the interferometric measurement system is the key factor determining the success or failure of the task. Laser frequency noise is one of the most important noises. Therefore, it is necessary to analyze the impact and importance of laser frequency fluctuations on measurement results. Due to the difficulty in simulating the environment in space, analyzing based on simulation systems is an ideal approach. Based on the simulation system of space gravitational wave detection laser interferometry measurement, the measurement errors caused by laser frequency fluctuations of free running laser on the measurement results of scientific interferometer, reference interferometer, and TM interferometer models was analyzed. Then, sensitivity analysis was conducted using the derivative method and Sobol method with interference laser wavelength as input parameter. The influence and importance of laser frequency fluctuations of reference beam and measurement beam on the output of three interferometer models were analyzed. The results indicate that: laser frequency fluctuations during free running stages, which will cause changes in the measurement results of the interferometer, these changes are far greater than the picometers. Additionally, under the experimental conditions of this paper, the importance of measurement beam frequency fluctuation on the outputs of the three interferometers is 100%, 56%, and 54% respectively. The importance of reference beam frequency fluctuation on the outputs of the three interferometers is 0%, 44%, and 46% respectively.

Key words Gravitational wave detection, Space laser interference, Laser interference simulation, Laser frequency noise, Sensitivity analysis

0 引言

引力波的发现对科学界具有重大的意义. 然而引力波非常微弱, 探测难度相当大, 需要探测器达到足够高的探测灵敏度. 激光干涉仪由于其探测灵敏度高、测量频段宽的优点, 为引力波探测带来巨大希望, 很快成为国际上引力波探测的主流方案. 由于地面探测器容易受到臂长和噪声等影响因素的限制, 因此其主要用于探测 1 Hz 以上的高频引力波. 为了探测 0.1 mHz 到 1 Hz 的中低频的引力波信号, 各种空间探测方案相继被提出, 例如 LISA^[1]、太极^[2]、天琴^[3]、OMEGA^[4] 等, 空间引力波探测具有极其重要的战略意义^[5].

空间引力波探测, 需要在数十万公里至百万公里的尺度上测量皮米级的长度变化, 对探测灵敏度有极

高的要求. 要提高探测灵敏度就需要分析和降低噪声. 在激光干涉测量系统中, 激光频率噪声是激光频率波动引起的噪声, 也是最重要的噪声之一, 有必要分析其对测量结果的影响.

由于地面条件的限制, 难以建立与百万公里级干涉链路完全等效的环境, 因此, 星间激光干涉测量仿真和分析是识别潜在问题、优化设计方案、协助关键技术研发和验证的理想手段. 太极团队建立了空间引力波探测全链路数值仿真原型系统, 包含激光干涉测量系统^[6]、扰动抑制系统等关键模块. 基于激光干涉测量系统, 进行灵敏度分析, 能够量化分析系统中不同参数对结果的影响和各参数的变化对测量结果影响的百分比 (重要程度)^[7,8], 为系统的设计和优化提供方向和途径.

本文基于激光干涉测量仿真系统, 分析了自由运

行激光器激光频率波动对其中的科学干涉仪、参考干涉仪和 TM 干涉仪模型造成的测量误差, 并运用直接求导法和 Sobol 法进行了以干涉激光波长为输入参数的灵敏度分析, 分析了参考光和测量光激光频率波动引起的波长波动对三种干涉仪模型输出的影响和重要程度, 得到定性和定量的结果。

1 空间引力波探测激光干涉测量仿真系统

空间引力波探测编队系统的典型结构为三个航天器在空间组成的一个等边三角形的编队。每个航天器上包含主从两个光学平台, 每个光学平台上包含一个自由落体的质量块, 称为测试质量 (Test Mass, TM)。主光学平台测试质量与另一个航天器从光学平台测试质量之间的距离称为臂长。探测系统包含激光干涉测量系统和干扰抑制系统, 本文针对激光干涉测量系统进行研究。

采用空间引力波探测激光干涉测量仿真系统对编队中涉及光传输、衍射、干涉等过程的部分进行仿真, 该系统包含了科学干涉仪、参考干涉仪、测试质量干涉仪 (TM 干涉仪) 仿真物理模型, 具备干涉仪瞬态读出信号的物理级仿真能力^[6]。

在仿真系统内构建了三个航天器模型 (SC1, SC2, SC3), 每个航天器上包含主光学平台和从光学平台各一个。每个光学平台上包含 TM、激光器、科学干涉仪 QPD (Quadrant Photodiode)、参考干涉仪 QPD、TM 干涉仪 QPD, 以及反射镜、分束器等元件模型, 共 18 个干涉仪模型, 对应 18 条干涉链路, 干涉光最终照射在 QPD 上, 得到 18 个相位差仿真信号。三星链路如图 1 所示^[9]。

分析内容涉及的场景包括激光在光学平台和空间的传播过程, 以及在三种干涉仪上的干涉过程。涉

及的物理模型包括光线追踪模型、高斯光束模型、ABCD 矩阵模型、衍射传输模型、外差干涉模型、QPD 信号读出模型。模型细节请参考文献 [6]。通过组织这些模型, 构建激光频率波动对激光干涉测量影响分析实验模型 (见图 2)。

涉及的元件模型包括光学平台上的 TM、激光器、反射镜、分束器、科学干涉仪 QPD、参考干涉仪 QPD、TM 干涉仪 QPD。其中, 科学干涉仪发生干涉的两束光为本光学平台激光器产生的光束 (本地光) 与另一航天器射来的光束 (远端光), 参考干涉仪和 TM 干涉仪发生干涉的两束光为本光学平台激光器产生的光束与本航天器另一光学平台射来的光束 (邻近光)。

采用的 QPD 读出相位差定义与 LISA Pathfinder (LPF) 所采用的相同, 模拟方法参照文献 [10]。模拟输出信号由两部分组成, 一是两束光在传播过程中累积的光程差, 通常在毫米量级以上, 为宏观部分; 二是

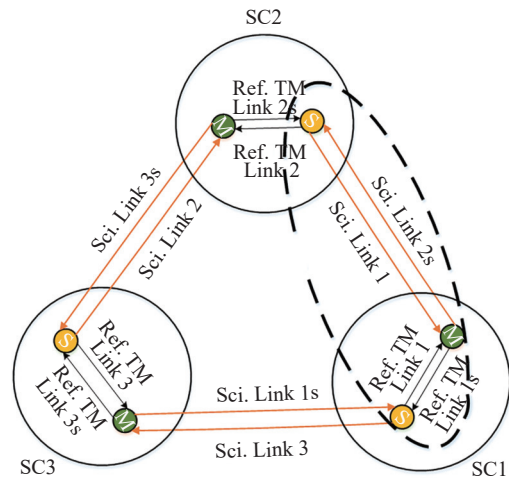


图 1 空间引力波探测编队系统链路

Fig. 1 Detection system links of space gravitational wave detection

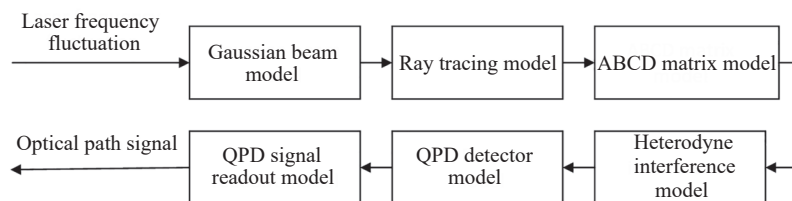


图 2 激光频率波动对激光干涉测量影响分析实验模型

Fig. 2 Experimental model for analyzing the influence of laser frequency fluctuation on laser interferometry

由于光束相对于探测器表面倾斜而产生的额外光程差, 通常在微米量级, 为微观部分. 本文用此信号模拟干涉仪输出, 单位 rad, 即

$$\phi^{\text{LPF}} = \frac{s_1}{\lambda_1} - \frac{s_2}{\lambda_2} + \arg(C_A + C_B + C_C + C_D). \quad (1)$$

式(1)等号右边前两项代表宏观部分, λ_1 和 λ_2 分别为测量光和参考光的波长, s_1 和 s_2 分别为测量光和参考光在传输中累积的光路径长度. 式(1)等号右边第三项代表微观部分, C_A, C_B, C_C, C_D 分别表示 QPD 表面各象限的电场复振幅分布, 具体可参考文献 [10]. 其中科学干涉仪的 s_1 , 包含了一个星间传输的距离, 仿真系统根据轨道数据计算此距离.

2 灵敏度分析方法

灵敏度分析方法大致可分为两大类, 局部灵敏度分析方法 (Local Sensitivity Analysis, LSA) 和全局灵敏度分析方法 (Global Sensitivity Analysis, GSA). LSA 方法主要分析各输入参数对模型输出的局部影响 (例如某个点), 以导数或偏导数为灵敏度指标, 常见方法有直接求导法、格林函数法、有限差分法. GSA 方法研究各输入参数对模型输出的全局影响 (整个定义域), 根据不同原理及方法有不同的灵敏度指标, 常见的方法有 Sobol 方法、FAST 方法等 [7]. 下面重点分析本文用到的直接求导法和 Sobol 方法.

2.1 直接求导法

直接求导法是 LSA 的一种, 以导数或偏导数为灵敏度评价指标. 当系统的数学模型比较简单、影响因素 (输入变量) 较少时, 用直接求导法可以快速地获得灵敏度分析结果 [7].

设系统模型表达式

$$z = f(x, y). \quad (2)$$

那么, 偏导数 $\partial z / \partial x(x_0, y_0)$ 即为 x 在点 (x_0, y_0) 处的灵敏度指标, y 的灵敏度指标计算方法类似. 显而易见的是, 参数的偏导数的绝对值越大, 参数对结果的影响越大.

2.2 Sobol 方法

Sobol 方法是基于模型分解和方差分析的一种 GSA. Sobol 方法提出了一类基于模型分解的更广义的灵敏度度量指标 [8], 其将模型或系统输出的方差分解为可归因于输入或输入集的分量. 例如某个模型具

有两个输入参数和一个输出, 利用这种方法, 可能计算出的输出方差的 60% 由第一个输入参数的方差引起, 25% 由第二个输入参数的方差引起, 15% 由两个输入参数的交互作用引起, 这些百分比就是灵敏度指标. 这种方法的优点之一是可以测量整个输入空间的灵敏度 [11].

Sobol 方法的思想是将函数 $f(x)$ 分解为 $2n$ 个递增项之和 (n 是参数的个数), 通过采样计算模型响应的总方差及各项偏方差, 从而求得灵敏度指标. 将函数 $f(x)$ 分解为 $2n$ 个递增项之和, 即

$$\begin{aligned} f(x) = & f_0 + \sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_s} f_{i_1 i_2 \dots i_s}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}) = \\ & f_0 + \sum_{i=1}^n f_i(x_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij}(x_i, x_j) + \dots + \\ & f_{12 \dots n}(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (3)$$

其中, f_0 以及其余各项说明详见文献 [8]. Sobol 方法已经证明, 经过一系列计算, 函数 $f(x)$ 的总方差可以表示为

$$\begin{aligned} D = \int f^2(x) dx - f_0^2 = & \sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_s} D_{i_1 i_2 \dots i_s} = \\ & \sum_{s=1}^n D_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} D_{ij} + \dots + D_{12 \dots n}. \end{aligned} \quad (4)$$

偏方差为

$$D_{i_1 i_2 \dots i_s} = \int f_{i_1 i_2 \dots i_s}^2(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) dx_{i_1} \dots dx_{i_s}. \quad (5)$$

其中, $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_s \leq n$ 且 $s=1, 2, \dots, n$. 灵敏度指标可以表示为

$$S_{i_1 i_2 \dots i_s} = \frac{D_{i_1 i_2 \dots i_s}}{D}. \quad (6)$$

所有灵敏度指标非负, 并且

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_s} S_{i_1 i_2 \dots i_s} = \sum_{s=1}^n S_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} S_{ij} + \dots + S_{12 \dots n} = 1. \quad (7)$$

其中, S_i 为参数 i 的一阶灵敏度指标, 反映了 i 参数的变化对模型输出的影响. S_{ij} 为一个二阶灵敏度指标, 反映了 i 与 j 参数之间相互作用对模型输出的影响, 以此类推. 某参数总灵敏度指标即为参数各阶灵敏度指标的总和, 具体参见文献 [7, 8, 11–15].

当分析的系统为非解析或黑箱系统时, 可以用蒙

特卡洛法计算总方差及各项偏方差, 从而计算灵敏度指标. 设 I 为单位区间 $[0, 1]$, I^n 为 n (参数个数) 维超立方体, 蒙特卡洛方法需要在 I^n 内生成一个随机分布的点序列, 常用的方法有 Sobol 伪随机数序列法和拉丁超立法抽样法, 本文使用 Sobol 伪随机数序列法. 需要注意的是, 此算法模块实现后, 应该用解析的模型检验算法模块实现的正确性. 这里利用 Sobol g-function 函数^[16]来验证本文 Sobol 算法实现的正确性. Sobol g-function 函数的方差和 Sobol 灵敏度指标都可以解析得到, 所以这个函数可以作为标准模型, 用来校核、验证全局灵敏度分析方法的正确性.

Sobol g-function 函数的数学模型如下:

$$Y = \prod_{i=1}^k \left(\frac{|4x_i - 2| + a_i}{1 + a_i} \right). \quad (8)$$

式中, k 表示输入参数的个数, a 为一组常数, 输入参数 x_i 分布在区间 $[0, 1]$ 上. 当 $k=8$, $a=(0, 1, 4.5, 9, 99, 99, 99, 99)$ 时, 8 个输入参数一阶灵敏度指标, 总灵敏度指标的解析计算和本文 Sobol 算法采样数为 5000 时的结果对比如表 1 所示.

由表 1 可见, sobol 算法本文解与解析解的差在 10^{-3} 量级, 即误差在 0.1% 量级, 说明本文 Sobol 算法实现正确.

3 实验设计

设定远端光和邻近光分别准确地照射到光学平台上远端光和邻近光入射口, 搭建的光学平台模型如

表 1 Sobol g-function 的灵敏度指标对比
Table 1 Comparison of sensitivity index of Sobol g-function

变量	一阶灵敏度指标		总灵敏度指标	
	本文解	解析解	本文解	解析解
x_1	0.7153	0.7165	0.7850	0.7871
x_2	0.1787	0.1791	0.2408	0.2420
x_3	0.0236	0.0237	0.0342	0.0340
x_4	0.0074	0.0072	0.0104	0.0105
x_5	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
x_6	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
x_7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
x_8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

图 3 所示^[6].

图 3 中元件的含义、摆放位置 (用坐标表示^[6]) 和摆放方向 (法方向) 见表 2.

基于前文描述的激光干涉测量仿真系统及干涉仪模型, 进行激光频率波动对激光干涉测量的影响分析. 分析的实验对象具体为 SC1 主光学平台上的科学干涉仪模型、参考干涉仪模型和 TM 干涉仪模型, 三个干涉仪的干涉链路分别对应图 1 虚线椭圆中的 Sci Link 1, Ref Link 1 和 TM Link 1.

仿真系统部分参数见表 3. 需要注意的是, 这里采用的仿真参数并不都是实际任务参数, 仅供灵敏度分析使用, 所有光学元件为理想状态, 是干涉仪瞬态读出信号的物理级仿真, 且没有引入任何噪声.

由于 LISA, 太极等任务明确给出了激光波长的指标, 且仿真系统内部的实际计算使用的参数为波长, 而激光频率、激光波长和光速之间存在固定的转换关系, 故选择三个干涉仪各自发生干涉的两束光的波长作为输入参数, 单位为 nm. 如前文所述, 科学干涉仪发生干涉的两束光为本地光和远端光, 参考干涉仪和 TM 干涉仪发生干涉的两束光为本地光和邻近光. 将本地光统称为参考光, 邻近光和远端光统称为测量光, 输出即为干涉仪直接输出的相位差 ϕ^{LPF} .

将仿真系统设置为静态模式, 即系统各部件位置

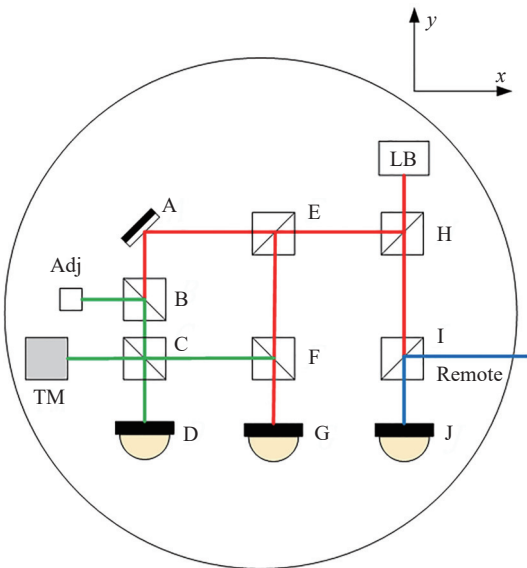


图 3 激光干涉测量仿真光学平台

Fig. 3 Optical bench used in laser interferometry simulation

表 2 仿真光学平台中各元件含义、摆放位置及方向
Table 2 Description, position and orientation of each component in the optical bench simulation

符号	含义	摆放位置/m	摆放方向
LB	激光器	(0.1, 0.1, 0)	(0, -1, 0)
A	反射镜	(-0.1, 0.05, 0)	(1, -1, 0)
B	分束器	(-0.1, 0.03, 0)	(-1, -1, 0)
C	分束器	(-0.1, 0, 0)	(-1, 1, 0)
E	分束器	(0, 0.05, 0)	(1, -1, 0)
F	分束器	(0, 0, 0)	(-1, -1, 0)
H	分束器	(0.1, 0.05, 0)	(-1, 1, 0)
I	分束器	(0.1, 0, 0)	(1, -1, 0)
J	科学干涉仪QPD	(0.1, 0.05, 0)	(0, 1, 0)
G	参考干涉仪QPD	(0, -0.05, 0)	(0, 1, 0)
D	TM干涉仪QPD	(-0.1, 0.05, 0)	(0, 1, 0)
TM	测试质量	(-0.2, 0, 0)	(1, 0, 0)
Remote	远端激光入射/本地激光出射点	(0.2, 0, 0)	(-1, 0, 0)
Adj	临近光学平台激光入射点	(-0.2, 0.03, 0)	(1, 0, 0)

表 3 仿真系统部分参数
Table 3 Parameters of the simulation system

参数	取值
臂长	3×10^6 km
外差干涉效率	1
QPD半径	1 mm
QPD狭缝大小	25 μ m
光速	299792458 m·s ⁻¹
激光功率	1 W
激光波长	1064 nm

表 4 干涉仪输入/输出的默认值
Table 4 Default values for input and output

干涉仪	λ^r /nm	λ^m /nm	ϕ^{LPP} /rad
科学干涉仪	1064	1064	$1.771574804774003 \times 10^{16}$
参考干涉仪	1064	1064	$1.771574738708464 \times 10^5$
TM干涉仪	1064	1064	$1.771574738775967 \times 10^5$

和姿态固定在初始状态不随时间变化. 此外, 不加入任何噪声. 当参考光和测量光的波长为默认值 1064 nm 时, 三个干涉仪输出的相位差为固定值, 如表 4 所示, λ^r 和 λ^m 分别表示参考光和测量光的波长.

当 λ^r 或 λ^m 改变时, 干涉仪输出 ϕ^{LPP} 相应变化, 与默认值产生一个差值 $\Delta\phi^{LPP}$. 根据 LISA 黄皮书^[1], 激光束默认波长为 1064 nm, 在探测敏感频段 3 mHz 处, 自由运行的激光器, 激光频率噪声的振幅谱密度 (ASD) 约为 $3.33 \text{ MHz} \cdot \text{Hz}^{-1/2}$. 利用仿真系统中基于 Shinozuka 算法^[17] 的噪声时间序列生成模块, 根据激光频率噪声 ASD 生成激光频率噪声的时间序

列, 可以得到激光频率在中心频率附近的波动幅度为 $(-1.5 \sim 1.5) \times 10^7 \text{ Hz}$. 根据激光波长, 光速与激光频率的关系, 可以得出自由运行的激光器激光波长在 1064 nm 附近波动的幅度为 $-0.00006 \sim 0.00006 \text{ nm}$, 则波长波动范围为 $1063.99994 \sim 1064.00006 \text{ nm}$.

3.1 激光频率波动导致的测量误差分析实验设计

分别对三个干涉仪进行实验, 已知激光波长波动的范围, 输入干涉仪模型, 得到的输出与默认值做差即可得到由 λ^r 或 λ^m 波动导致的相位差 $\Delta\phi^{LPP}$, 并能够换算成光程差, 即为激光频率波动导致的测量误差.

首先固定 λ^r 为 1064 nm, 分析 λ^m 波动造成的测量误差; 然后固定 λ^m 为 1064 nm, 分析 λ^r 波动造成的测量误差; 进而分析 λ^r 和 λ^m 同时波动造成的测量误差.

3.2 干涉仪参数灵敏度分析实验设计

分别对三个干涉仪进行参数灵敏度分析实验, 模型输入参数为 λ^r 和 λ^m , 模型输出是 ϕ^{LPF} . 输入参数均在区间 $[1063.99994, 1064.00006]$ 内, 由此对应一个二维参数空间.

3.2.1 直接求导法

由于每个干涉仪包含两个输入参数和一个输出, 并且两个输入参数的参数空间已确定, 因此能够通过绘制散点图来描述三个干涉仪模型输入 λ^r, λ^m 与输出 ϕ^{LPF} 的关系, 并以式(1)为模板进行函数拟合, 然后运用直接求导法, 求出干涉仪模型的灵敏度指标, 分析激光频率波动对干涉仪输出的影响和重要程度.

3.2.2 Sobol 方法

在参数空间内利用 Sobol 伪随机序列法采样, 采样数为 2000, 4000 和 6000. 将采样点输入模型后运行并获得输出, 利用生成的数据计算总方差和偏方差, 从而计算 λ^r 和 λ^m 的灵敏度指标. 随着采样数的增加, 灵敏度指标将会收敛. 理论上 Sobol 灵敏度分析方法得到的每个输入参数的各阶灵敏度应该在区间 $[0, 1]$ 内, 采样数较小时, 一阶灵敏度指标可

能远大于 1.

4 实验结果与分析

4.1 激光频率波动导致的测量误差分析实验结果

自由运行激光器 λ^r 或 λ^m 波动导致的三个干涉仪输出的相位差 $\Delta\phi^{LPF}$, 以及对应的光程差如表 5 所示.

自由运行激光器激光波长波动导致科学干涉仪、参考干涉仪、TM 干涉仪测量出的光程差最大波动分别可以达到 $-169 \sim 169$ m, $(-2.98 \sim 2.98) \times 10^{-8}$ m, $(-4.11 \sim 4.11) \times 10^{-8}$ m, 远大于皮米级.

4.2 干涉仪参数灵敏度分析实验结果

4.2.1 直接求导法结果与分析

输入参数定义域为 $[1063.99994, 1064.00006]$, 以 0.00001 为间隔采样, 绘制的干涉仪输入/输出关系散点图如图 4~6 所示.

对三种干涉仪模型的输入/输出进行函数拟合. 由于式(1)中的微观部分相对于宏观部分极小, 因此在函数拟合过程中可以将其视为常数. 科学干涉仪、参考干涉仪、TM 干涉仪的拟合函数分别为

表 5 自由运行激光器激光波长波动导致的测量误差

Table 5 Measurement errors caused by wavelength fluctuations in free running lasers

干涉仪	λ^m 波动范围		λ^r 波动范围		λ^r, λ^m 同时波动范围	
	相位差/rad	光程差/m	相位差/rad	光程差/m	相位差/rad	光程差/m
科学干涉仪	$\pm 9.99 \times 10^8$	± 169	0	0	$\pm 9.99 \times 10^8$	± 169
参考干涉仪	$\pm 9.32 \times 10^{-2}$	$\pm 1.58 \times 10^{-8}$	$\pm 8.33 \times 10^{-2}$	$\pm 1.41 \times 10^{-8}$	± 0.176	$\pm 2.98 \times 10^{-8}$
TM干涉仪	± 0.127	$\pm 2.14 \times 10^{-8}$	± 0.117	$\pm 1.97 \times 10^{-8}$	± 0.243	$\pm 4.11 \times 10^{-8}$

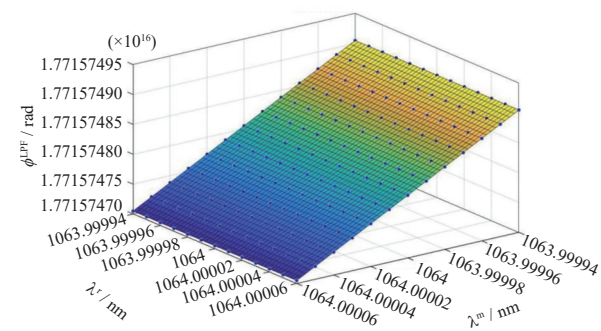


图 4 科学干涉仪输入/输出关系散点图

Fig. 4 Scatter plot of science interferometer input-output relationship

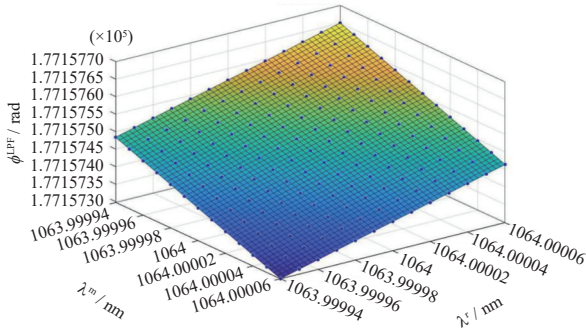


图 5 参考干涉仪输入/输出关系散点图

Fig. 5 Scatter plot of reference interferometer input-output relationship

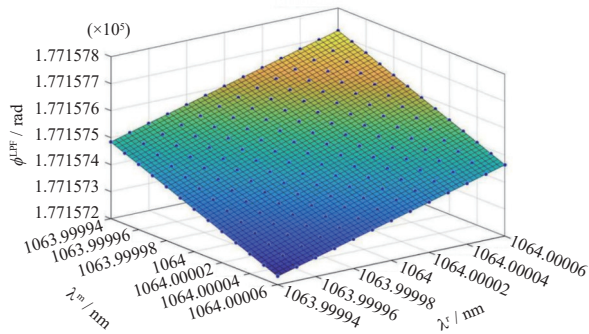


图6 TM干涉仪输入/输出关系散点图

Fig. 6 Scatter plot of TM interferometer input-output relationship

$$\phi = \frac{18849555923737874432}{\lambda^m} - \frac{942477796.0769379}{\lambda^r} + 30, \quad (9)$$

$$\phi = \frac{1759291886.010284}{\lambda^m} - \frac{1570796326.794896}{\lambda^r} - 0.006594743579626, \quad (10)$$

$$\phi = \frac{2387610416.728243}{\lambda^m} - \frac{2199114857.512855}{\lambda^r} - 0.006587993295398. \quad (11)$$

对式(9)~(11)求偏导,代入点(1064, 1064),即可以得到各参数在该点的一阶灵敏度指标,结果如表6所示。

对于科学干涉仪模型,测量光波长的灵敏度指标的绝对值远大于参考光,说明测量光激光频率波动引起的波长波动对科学干涉仪结果的影响是决定性的,而参考光几乎不影响结果;对于参考干涉仪和TM干涉仪模型,测量光波长的灵敏度指标的绝对值与参考光的接近,前者约是后者的1.1倍,说明对于参考干涉仪和TM干涉仪模型,测量光和参考光激光频率波动引起的波长波动对结果的重要程度接近。由三个干涉仪的散点图和灵敏度指标可以看出,对于科学干涉仪,随着测量光波长增大,相位差减小,参考光几乎不影响相位差测量。对于参考干涉仪和TM干涉仪模型,随着测量光波长增大,相位差减小,随着参考光波长增大,相位差增大。

4.2.2 Sobol方法结果与分析

科学干涉仪、参考干涉仪、TM干涉仪Sobol方法的结果如表7~9所示。

随着采样数的增加,三个干涉仪输入参数的总灵

表6 直接求导法的结果

Table 6 Results of sensitivity analysis based on derivative method

模型	模型输入参数	一阶灵敏度指标
科学干涉仪	λ^r	832.5070
	λ^m	-16650139143445.3213
参考干涉仪	λ^r	1387.5116
	λ^m	-1554.0130
TM干涉仪	λ^r	1942.5162
	λ^m	-2109.0176

敏度指标收敛。对于科学干涉仪模型,测量光波长总灵敏度指标约为1,参考光总灵敏度指标为0,说明测量光激光频率波动引起的波长波动对科学干涉仪结果的影响程度约为100%,参考光的约为0%,与直接求导法得出的结论一致。这是由于测量光的传播路径长度达到百万公里级,远大于参考光;对于参考干涉仪模型,测量光波长的总灵敏度指标略大于参考光,前者约0.56,后者约0.44。说明对于参考干涉仪模型,测量光和参考光激光频率波动引起的波长波动对结果的影响程度分别约为56%和44%,重要程度接近,与直接求导法得出的结论一致;对于TM干涉仪模型,测量光波长的总灵敏度指标略大于参考光,前者约0.54,后者约0.46。说明对于TM干涉仪模型,测量光和参考光激光频率波动引起的波长波动对结果的影响程度约为54%和46%,重要程度接近,与直接求导法得出的结论一致。

5 结论与讨论

基于空间引力波探测激光干涉测量仿真系统,研究了激光频率波动对测量结果的影响和重要程度。得到如下的结论。

(1) 自由运行激光器激光频率波动引起科学干涉仪、参考干涉仪、TM干涉仪测量结果变化分别可达到 $-169 \sim 169 \text{ m}$, $(-2.98 \sim 2.98) \times 10^{-8} \text{ m}$, $(-4.11 \sim 4.11) \times 10^{-8} \text{ m}$, 远大于皮米级。

(2) 对于科学干涉仪,随着测量光频率减小,波长增大,相位差减小;参考光几乎不影响相位差测量。对于参考干涉仪和TM干涉仪模型,随着测量光频率增大,波长增大,相位差减小,随着参考光波长增大,相位差增大。

表 7 科学干涉仪 Sobol 方法的结果

Table 7 Results of sensitivity analysis based on Sobol method for Sci-interferometer

采样数	一阶灵敏度指标		总灵敏度指标	
	λ^r	λ^m	λ^r	λ^m
2000	0.000000000	-34080.509401456	0.000000000	1.000038804
4000	0.000000000	8313.376740156	0.000000000	1.000011119
6000	0.000000000	-6926.120416902	0.000000000	0.999992183

表 8 参考干涉仪 Sobol 方法的结果

Table 8 Results of sensitivity analysis based on Sobol method for Ref-interferometer

采样数	一阶灵敏度指标		总灵敏度指标	
	λ^r	λ^m	λ^r	λ^m
2000	398.732348967	-2031.565140266	0.443703735	0.556524900
4000	1084.355308514	496.053218558	0.443442013	0.556361816
6000	892.892434128	-412.482744570	0.443667763	0.556508727

表 9 TM 干涉仪 Sobol 方法的结果

Table 9 Results of sensitivity analysis based on Sobol method for TM interferometer

采样数	一阶灵敏度指标		总灵敏度指标	
	λ^r	λ^m	λ^r	λ^m
2000	294.825816488	-1455.380150762	0.459104781	0.541125987
4000	801.554373052	355.541338080	0.458833596	0.540966969
6000	660.049114648	-295.382471800	0.459067649	0.541110365

(3) 对于科学干涉仪模型, 测量光激光频率波动和参考光激光频率波动对输出的影响程度分别约为 100% 和 0; 对于参考干涉仪模型, 两者分别约为 56% 和 44%; 对于 TM 干涉仪模型, 两者分别约为 54% 和 46%.

实验结果表明, 自由运行激光器激光频率噪声对科学干涉仪测量结果的影响在百米量级, 其量级远大于皮米量级, 这也是需要采用激光预稳、锁臂, 并最终使用 TDI(时间延迟干涉) 等技术来降低或消除激光频率噪声的原因^[18]. LISA 黄皮书^[1] 同样给出了预稳、锁臂、TDI 后的噪声指标, 用本文 3.1 节的方法还可以得到, 对于科学干涉仪, 预稳后测量光频率波动导致的光程差波动范围为 $-5.64 \sim 5.64$ m, 锁臂后为 $(-2.2 \sim 2.2) \times 10^{-5}$ m, 仍然远大于皮米量级. 由于 TDI 是一种数据后处理算法, 可能不适合用统计噪声指标计算, 故本文暂不讨论.

三个干涉仪模块, 输入参数的一阶灵敏度不在

[0, 1] 区间, 说明如果要计算一阶灵敏度, 需要更多的采样数, 但对于只有两个输入参数, 并且输入参数相互独立的情况, 总灵敏度的意义等同于一阶灵敏度, 因此只需要关注总灵敏度指标, 同时也可以减少计算成本.

上述实验只研究了激光频率波动对模型输出的影响, 在未来的实验中, 还可以选择更多输入参数进行研究, 例如 QPD 半径、QPD 狭缝大小、望远镜半径等, 这些研究对于空间引力波探测方案的优化、关键参数和技术的验证具有重要的意义.

参考文献

[1] DANZMANN K, PRINCE T A, BINETRUY P, *et al.* LISA: Unveiling a Hidden Universe: Assessment Study Report[R]. Hannover: ESA/SRE, 2011, 3(2)
[2] LUO Z R, WANG Y, WU Y L, *et al.* The Taiji program: a concise overview[J]. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2021, 2021(5): 05A108

- [3] LUO J, CHEN L S, DUAN H Z, *et al.* TianQin: a spaceborne gravitational wave detector[J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2016, **33**(3): 035010
- [4] HISCOCK B, HELTINGS R W. OMEGA: a space gravitational wave MIDEX mission[C]//American Astronomical Society, 191st AAS Meeting. Bulletin of the American Astronomical Society, 1997: 1312
- [5] WU Yueliang, HU Wenrui, WANG Jianyu, *et al.* Review and scientific objectives of spaceborne gravitational wave detection missions[J]. *Chinese Journal of Space Science*, 2023, **43**(4): 589-599 (吴岳良, 胡文瑞, 王建宇, 等. 空间引力波探测综述与拟解决的科学问题 [J]. *空间科学学报*, 2023, **43**(4): 589-599)
- [6] ZHAO M Y, PENG X D, YANG Z, *et al.* Preliminary simulation of intersatellite laser interference link for the Taiji program[J]. *Journal of Astronomical Telescopes, Instruments, and Systems*, 2022, **8**(3): 038002
- [7] SALTELLI A, RATTO M, ANDRES T, *et al.* Global Sensitivity Analysis: The Primer[M]. Hoboken: John Wiley & Sons, 2008
- [8] SOBOL' I M. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2001, **55**(1/2/3): 271-280
- [9] ZHAO Mengyuan. Research on optical simulation of laser interference link in space gravitational wave detection[D]. Beijing: University of Chinese Academy of Sciences, 2023 (赵梦园. 空间引力波探测激光干涉测量链路光学仿真研究 [D]. 北京: 中国科学院大学, 2023)
- [10] WANNER G, HEINZEL G, KOCHKINA E, *et al.* Methods for simulating the readout of lengths and angles in laser interferometers with Gaussian beams[J]. *Optics Communications*, 2012, **285**(24): 4831-4839
- [11] SALTELLI A, ANNONI P. How to avoid a perfunctory sensitivity analysis[J]. *Environmental Modelling & Software*, 2010, **25**(12): 1508-1517
- [12] SOBOL' I M. Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models[J]. *Mathematical Modelling and Computational Experiment*, 1993, **1**(4): 407-414
- [13] HOMMA T, SALTELLI A. Importance measures in global sensitivity analysis of nonlinear models[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 1996, **52**(1): 1-17
- [14] SALTELLI A, ANNONI P, AZZINI I, *et al.* Variance based sensitivity analysis of model output. Design and estimator for the total sensitivity index[J]. *Computer Physics Communications*, 2010, **181**(2): 259-270
- [15] LIU Yuanyuan. Sensitivity Analysis on the Kinematic Accuracy of Automotive Steering Mechanism and Optimization Design[D]. Changsha: Hunan University, 2017 (刘源远. 汽车转向机构运动精度的灵敏度分析及优化设计 [D]. 长沙: 湖南大学, 2017)
- [16] SALTELLI A, SOBOL I M. About the use of rank transformation in sensitivity analysis of model output[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 1995, **50**(3): 225-239
- [17] SHINOZUKA M, DEODATIS G. Simulation of stochastic processes by spectral representation[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1991, **44**(4): 191-204
- [18] LUO Ziren, BAI Shan, BIAN Xing, *et al.* Gravitational wave detection by space laser interferometry[J]. *Advances in Mechanics*, 2013, **43**(4): 415-447 (罗子人, 白珊, 边星, 等. 空间激光干涉引力波探测 [J]. *力学进展*, 2013, **43**(4): 415-447)

作者简介



刘宇男, 1997年6月出生于山西省阳泉市, 现为中国科学院大学杭州高等研究院及中国科学院国家空间科学中心硕士研究生, 参与了空间引力波探测太极计划全链路动态数值仿真的工作。

E-mail: liuyun21_a@mailsucas.ac.cn



张玉珠(通信作者)女, 1983年11月出生于北京市, 现为中国科学院国家空间科学中心副研究员, 硕士生导师, 主要研究方向为复杂系统仿真、空间引力波探测任务仿真和基于模型的系统工程(MBSE)等。

E-mail: zhangyuzhu@nssc.ac.cn