0254-6124/2021/41(6)-962–06 *Chin. J. Space Sci.* 空间科学学报

WANG Qiang, ZHANG Wei, REN Zhenzhen, GONG Jianze, JING Yuhang. Combinationa1 model for real-time computing rocket falling point based on space delamination (in Chinese). *Chin. J. Space Sci.*, 2021, **41**(6): 962-967. DOI:10.11728/cjss2021.06.962

基于空间分层组合设计的火箭落点实时计算模型

王 强 张 维 任臻臻 龚建泽 净宇航

(西昌卫星发射中心 西昌 615000)

摘 要 为保证航天发射任务航区安全, 实现火箭落点的高精度实时快速计算, 提出一种基于空间分层的数学模型, 对落点计算几何模型与动力学模型进行组合设计. 该模型将弹道空间分层为自由段和再入段, 自由段采用地球扁率修正的落点计算几何椭圆模型, 而再入段采用考虑了空气阻力的动力学模型, 并加入地球摄动及旋转等因素的修正. 经与实际落点数据对比验证, 该模型实现了精度和效率的最佳融合, 能够满足航天发射任务火箭落点高精度、快实时的计算要求.

关键词 火箭落点, 空间分层, 几何模型, 动力学模型

中图分类号 V 412

Combinational Model for Real-time Computing Rocket Falling Point Based on Space Delamination

WANG Qiang ZHANG Wei REN Zhenzhen

GONG Jianze JING Yuhang

(*Xichang Satellite Launch Center, Xichang* 615000)

Abstract A mathematical model based on space delamination combining geometric and dynamical models for falling point calculation is proposed to ensure the safety of the space launch mission's flight zone and to achieve high accuracy and fast calculation of rocket falling point in real time. The model stratifies the trajectory into a free segment and a re-entry segment. In the free segment, an elliptical geometric model is used considering Earth oblateness correction and in the re-entry segment, a dynamic model is used adding air resistance. Corrections for factors such as geophysical disturbance and garth rotation are also incorporated. Through validation of actual falling point data, it is found that the model can maximize the integration of accuracy and efficiency, and could be used to calculate rocket falling point for space launch missions with high accuracy and real-time

2020-09-02 收到原稿, 2021-07-10 收到修定稿

E-mail: wq85412@sina.com

performance.

Key words Rocket falling point, Space delamination, Geometric model, Dynamic model

0 引言

航天发射场的一项重要任务是确保火箭发射过程中航区安全. 为此, 发射场系统需要假定在火箭飞行出现重大故障即时关机的前提下, 实时计算异常飞行火箭的落点, 作为选择火箭炸毁时机以保护航区安全的关键依据. 航天发射任务中, 为避免故障火箭落入保护区造成重大生命财产损失, 需要对落点计算模型进行研究, 实现火箭落点的快速准确预测.

计算火箭落点最简便、直接的方法是采用标准几何模型. 这种方法简单快捷, 实用性好, 但是计算的火箭落点坠落弹道与真实情况差异较大, 精度不高. 真实环境下火箭坠落的被动段弹道要复杂得多, 受到空气动力、目标特性、地球物理摄动、地球扁率以及旋转等多种因素影响. 其中, 空气动力包括大气风场力和空气阻力, 由于火箭在无控坠落过程中速度非常大, 因此受空气阻力影响很大, 而受大气风场力影响较小 [1,2].

为提高落点计算精度, 需要加入空气阻力因素, 这需要建立落点计算的动力学模型. 由于动力学模型求解过程异常复杂, 目前普遍采用高精度单步积分算法实现动力学模型的分步积分求解. 这种算法精度高, 但是计算量大, 快速实时性不理想.

在火箭坠落飞行的空间中, 当高度较高时, 空气非常稀薄, 速度也较小, 空气阻力接近零, 可以忽略, 直接采用标准几何模型计算并进行扁率修正, 此段是不需考虑空气阻力影响的自由段空间. 随着高度降低, 空气密度逐渐增大, 空气阻力也逐渐增大, 当空气阻力增大到对坠落弹道产生较大影响时, 需要采用考虑空气阻力的动力学模型, 此段是需要考虑空气阻力影响的再入段空间.

综合考虑两种落点计算模型优缺点, 本文提出一种将落点计算几何模型与动力学模型进行空间组合设计的数学模型, 将异常飞行火箭无控坠落的被动段弹道空间分解为自由段和再入段, 自由段不需考虑空气阻力, 采用地球扁率修正的落点计算几何椭圆模型; 再入段采用加入空气阻力的动力学模型, 同时加入了地球摄动及旋转等因素的修正.

以火箭飞行某时刻残骸坠落为例. 采用标准几何模型只需完成全过程落点计算公式的 1 次计算, 计算精度较差; 采用动力学模型, 全过程需进行上万次计算; 采用本文模型, 前段约 3/5 时间采用几何模型完成自由段的 1 次计算, 后段约 2/5 时间在再入段进行动力学模型单步积分计算, 计算量仅为动力学模型的 2/5. 本文模型具备动力学模型的高精度, 同时计算量只有动力学模型的 1/2~1/3, 计算效率较高.

1 落点计算模型

大气阻力开始产生影响的高度为 80~100 km, 考虑到大气全部质量的 75% 以上集中在对流层, 即高度 11 km 以下 [3,4]. 因此, 模型建立过程中, 可以设定高度界限. 图 1 给出了火箭无控坠落自由段及再入段主要状态参数的关系. 从图 1 可以看出, 当高度大于 30 km, 自由段为起点 (图 1 中 k 点) 与其对称点 (图 1 中 e 点) 之间的弹道弧段, 空气较为稀薄, 可以不考虑空气阻力影响, 采用几何椭圆模型; 再入段为自由段终点 (图 1 中 e 点) 至落点 (图 1 中 C 点)

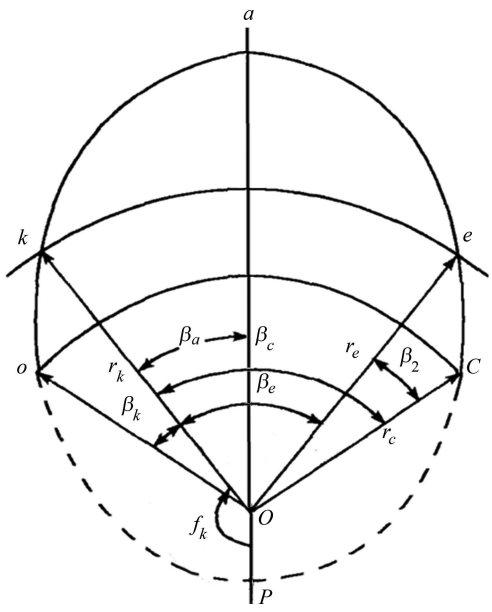

图 1 火箭无控坠落自由段及再入段主要状态参数关系

Fig. 1 Main state parameters of the free and re-entry segments of the uncontrolled fall of the rocket

之间的弧段, 考虑空气阻力的影响, 采用动力学模型. 当高度小于 30 km 时, 首先采用动力学模型计算 30 km 高度的弹道参数, 以此为自由段起点, 采用几何椭圆与动力学相结合的模型. 模型组合设计贴近火箭无控坠落的真实飞行情况.

在图 1 中, o, k, e, a, P, C 点分别为火箭发射点、关机点、再入点、远地点、近地点和落点, β_c, β_e, β_2 分别为全程、自由段和再入段的射程角.

1.1 模型计算流程

落点计算模型的计算流程如图 2 所示. 根据已知参数, 可以计算得到火箭关机点的空间参数. 当高度大于 30 km 时, 直接计算得到自由段起点参数 (图 1 中的 k 点); 当高度小于 30 km 时, 采用动力学模型, 基于四阶龙格–库塔法单步递推计算高度 30 km 的自由段起点参数.

在空间自由段, 利用椭圆弹道理论模型, 加入地球扁率修正, 计算得出自由段终点, 即再入段始点 (图 1 中 e 点) 的弹道参数; 在空间再入段, 采用考虑空气阻力的动力学模型, 计算得到再入段飞行时间和射程角. 最后结合自由段参数, 得到总飞行时间和射程角, 加入地球摄动、地球自转飞行时间修正, 计算得到最终的火箭落点.

1.2 自由段参数计算

以地球属性参数 (包括地球赤道半径 a_e、扁率 e、引力常数 f_M、平均半径 R、自转角速率 Ω)、发射工位大地坐标 (经度 L_a、纬度 B_a、高程 h_a) 以及发射系关机点位置与速度为输入, 计算得到地心系的位置 $(\hat{x}_k, \hat{y}_k, \hat{z}_k)$ 与速度 $(\hat{v}_{xk}, \hat{v}_{yk}, \hat{v}_{zk})$, 计算公式详见文献 [5]. 计算得到自由段起点 (图 1 中 k 点) 的弹道参数为

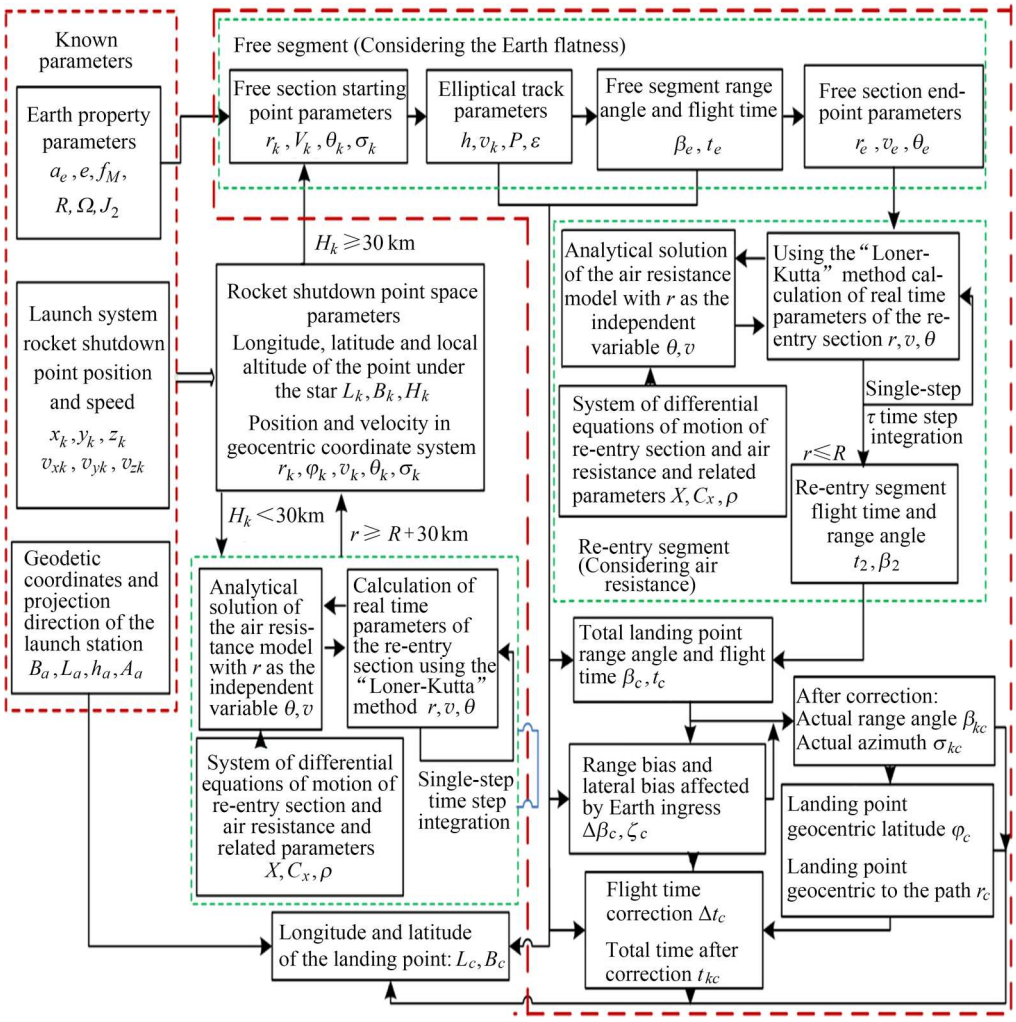

图 2 落点计算模型的计算流程

Fig. 2 Calculation flow of the falling point calculation model

$$\begin{cases} r_k = \sqrt{\hat{x}_k^2 + \hat{y}_k^2 + \hat{z}_k^2}; \\ V_k = \sqrt{\hat{v}_{xk}^2 + \hat{v}_{yk}^2 + (\hat{v}_{zk} + r_k \Omega \cos\varphi_k)^2}; \\ \theta_k = \arcsin(\hat{v}_{yk}/v_k), \quad (-\pi/2, -\pi/2); \\ \sigma_k = (\hat{v}_{zk} + r_k \Omega \cos\varphi_k)/\hat{v}_{xk}, \quad (0, 2\pi). \end{cases} \tag{1}$$

式中, $\varphi_k = \arcsin(\hat{z}_k/r_k)$ 为地心纬度. 基于以上弹道参数, 计算自由段几何椭圆轨迹参数, 根据文献 [4, 6] 计算得到自由段射程角 β_e 和飞行时间 t_e, 加入地球扁率修正, 计算得到自由段终点 (图 1 中 k 点) 的弹道参数 (r_e, v_e, θ_e), 即再入段的始点参数.

1.3　再入段参数计算

考虑空气阻力的影响, 令火箭飞行速度为 v, 当地水平线倾角为 θ, 地心径向距离为 r, 空气阻力为 X, 重力为 mg (其中 m 为质量, g 为重力加速度), 速度的切线方向为 x, 图 3 给出了火箭再入段的运动特性.

再入段运动微分方程组为 [4]

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{X}{m} - g\sin\theta, \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \left(\dfrac{v}{r} - \dfrac{g}{v}\right)\cos\theta, \\ \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v\sin\theta. \end{cases} \tag{2}$$

当火箭以高速进入稠密大气层时, 在巨大的空气阻力作用下, 将有一个较大的负加速度. 工程实践表明, 除刚进入大气层的一小段弹道外, 其余绝大部分再入段弹道的空气阻力均远大于引力. 而且再入段引力加速度 g 变化较小, 可将其视为常数.

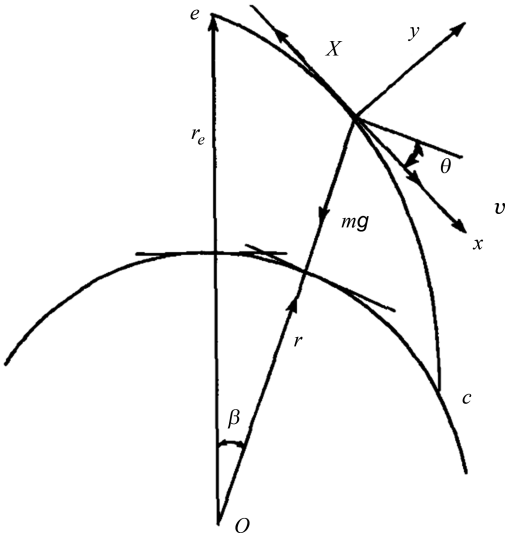

图 3　考虑空气阻力的再入段运动特性

Fig. 3　Motion characteristics of re-entry segment considering air resistance

大气密度的标准分布取为指数规律 $\rho = \rho_0 \mathrm{e}^{-\mu h}$, 其中 $\mu = (T_0\hat{R})^{-1}$, $\hat{R}$ 为以重力工程制单位表示的海平面干燥空气的气体常数, 值为 29.27, T_0 为海平面的绝对温度, 理想气体状态下 ρ_0 为 1.225 05, 可根据实际气象条件取 ρ_0 的值. 火箭所受大气阻力为 [7]

$$X = C_x S_m \rho v^2/2. \tag{3}$$

式中, C_x 为空气阻力的阻力系数, 是速度与高度的函数, $C_x = C_0 v^\alpha \mathrm{e}^{\beta h}$, 这里 C_0, α, β 可通过已知试验数据拟合求得. 火箭质量 m 为火箭总质量减去燃料消耗量 (级间分离后, 还需减去分离体整体质量). 火箭坠落过程的空间面积特性变化非常复杂, 但由于坠落速度很快, 受空气阻力很大, 致使火箭姿态趋近速度方向, 因而阻力受力面积 S_m 取火箭最小截面积.

对于再入段飞行时间 t_2 和射程角 β_2 的计算, 可根据求解出的条件, 采用时域有限积分算法, 选取一定的时间步长逐步积分算出最终结果. 龙格–库塔法是一种在工程上应用广泛的高精度单步积分算法, 采用四阶龙格–库塔法, 以数据采样频率为步长进行数值积分计算. 四阶龙格–库塔法需要进行 4 次计算, 是可以自启动的单步法, 需要存储的数据量少, 计算精度较高. 取时间步长为 τ, 其基本公式为 [5]

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i), \\ k_2 = f(x_{i+1/2}, y_i + k_1 h/2), \\ k_3 = f(x_{i+1/2}, y_i + k_2 h/2), \\ k_4 = f(x_{i+1}, y_i + k_3 h), \\ y_{i+1} = y_i + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6. \end{cases} \tag{4}$$

其中, $f(x_i, y_i)$ 表示单步积分量, y_i 为单步积分前的初值 (v_i, θ_i, r_i), x_i 为式中其他参数. 以中心机数据采样频率为基准, 取时间步长 $\tau = 0.05\,\mathrm{s}$, 以火箭自由段终点的弹道参数为初值, 利用四阶龙格–库塔法实现火箭再入段计算的过程如下.

(1) 单步计算: 利用位置与速度的初值 (v_i, θ_i, r_i) 及龙格–库塔法基本公式, 计算下一时刻 $t_{i+1} = t_i + \tau$ 的位置与速度 $(v_{i+1}, \theta_{i+1}, r_{i+1})$. 对于单步积分射程角, 利用三角正弦定理计算得到, 计算公式为

$$\begin{cases} \Delta\beta_i = \arcsin\Big[\dfrac{\tau}{2}(v_i\cos\theta_i + \\ \qquad\qquad v_{i+1}\cos\theta_{i+1})\dfrac{\cos\theta_{i+1}}{r_i}\Big], \\ \beta_{i+1} = \beta_i + \Delta\beta_i. \end{cases} \tag{5}$$

(2) 判断控制: 将单步计算结果作为下一步计算的初值, 按此策略递推计算, 其落点判断控制为 $r < R$ (地球平均半径). 如果成立, 则得到落点参数, 累计时间即为再入段飞行时间 t_2, 再入段射程角 $\beta_2 = \beta_{i+1}$, 然后进行计算; 否则, 返回进行单步计算. 总射程角 $\beta_c = \beta_e + \beta_2$, 总飞行时间 $t_c = t_e + t_2$.

1.4 落点参数计算

依据文献 [8−10] 中计算地球摄动影响的射程角修正 $\Delta\beta_c$ 和侧向偏差修正 ζ_c, 计算修正后的弹道射程角 β_{kc} 和方位角 σ_{kc}, 有

$$\begin{cases} \cos\beta_{kc} = \cos(\beta_c + \Delta\beta_c)\cos\zeta_c, \\ \sin\Delta\sigma_k = \sin\zeta_c / \sin\beta_{kc}, \\ \sigma_{kc} = \sigma_k + \Delta\sigma_k. \end{cases} \tag{6}$$

落点在惯性坐标系的地心纬度 φ_c, 有

$$\sin\varphi_c = \cos\beta_{kc}\sin\varphi_k + \sin\beta_{kc}\cos\varphi_k\cos\sigma_{kc}. \tag{7}$$

基于文献 [4, 11] 的公式计算火箭飞行时间修正量 Δt_c, 得出修正后较精确的飞行时间 $t_{kc} = t_c + \Delta t_c$.

火箭落点与星下点的经度之差为

$$\cos\Delta L_{kc} = \frac{\sin\varphi_c\cos\varphi_k - \sin\beta_{kc}\cos\sigma_{kc}}{\sin\varphi_k\cos\varphi_c}. \tag{8}$$

ΔL_{kc} 与图 1 中 k 点的星下点经度

$$L_k = \arctan(y_k/x_k)$$

求和, 再减去地球自转修正, 即可得到落点经度. 落点的大地经纬度为

$$\begin{cases} L_c = L_k + \Delta L_{kc} - \Omega t_{kc}, \\ B_c = \arctan\left(\dfrac{\tan\varphi_c}{1-e^2}\right). \end{cases} \tag{9}$$

2 模型验证及分析

2.1 模型精度分析方法

以计算落点与实际测量落点之间的距离 ΔS 作为评价参数, 进行模型精度检验. 设模型计算的落点为 (L_c, B_c), 实际落点为 (L_0, B_0), 则两点之间的距离 ΔS 可由如下公式计算得到:

$$\begin{cases} \varphi_0 = \arctan[(1-e^2)\tan B_0], \\ \cos\beta_{c0} = \sin\varphi_c\sin\varphi_0 + \\ \qquad \cos\varphi_c\cos\varphi_0\cos(L_c - L_0), \\ r_0 = a_e(1-e^2)^{0.5}/(1-e^2\sin^2 B_k)^{0.5}, \\ \Delta S = \beta_{c0}(r_c + r_0)/2. \end{cases} \tag{10}$$

2.2 落点计算的比对分析

利用火箭的实际残骸落点与本文模型实时计算的结果和残骸理论落点进行比较分析, 检验模型的精度和应用效果.

依据某型火箭两类典型弹道的残骸实际落点数据, 对模型精度进行验证分析. 计算中取地面温度为 15°C, 阻尼系数

$$C_x = 2.242\,92\times10^{-8}v^{-0.005\,336}e^{0.002\,015\,2h}.$$

计算结果如下.

(1) Ⅰ 类典型弹道. 以某次任务火箭一子级残骸落点为例, 理论落点、计算落点和实际落点的对比如图 4 所示. 模型实时计算落点、理论落点与实际落点的距离误差分别未 ΔS 模型 = 3.46 km, ΔS 理论 = 9.6 km. 相比理论落点, 模型落点距离误差减少了 6.14 km.

(2) Ⅱ 类典型弹道. 图 5 中方形、三角形和圆形表征意义同图 4. 模型实时计算落点、理论落点与实际落点的距离误差分别为 ΔS 模型 = 5.73 km, ΔS 理论 = 11.59 km. 相比理论落点, 模型落点距离误差减少了 5.86 km.

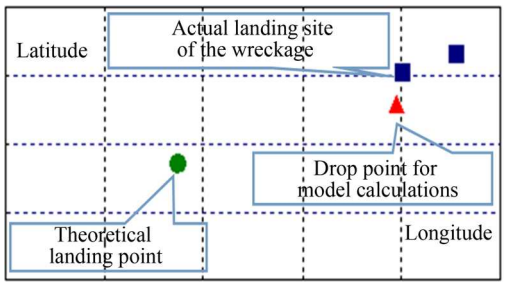

图 4 火箭一子级残骸落点结果比较

Fig. 4 Comparison of the results of the rocket's first sub-stage wreckage falling point

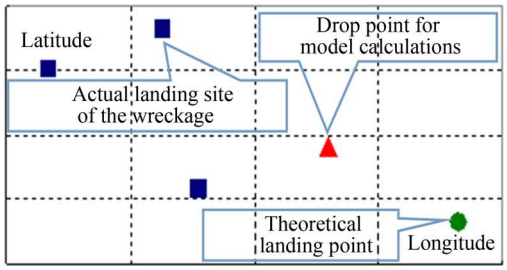

图 5 火箭一子级残骸落点结果比较

Fig. 5 Comparison of the results of the rocket's first sub-stage wreckage falling point

2.3　模型计算结果分析

模型共对 12 次实际落点数据进行比较分析, 其中误差最大为 12.63 km, 平均误差约为 5.12 km. 落点计算精度较为理想, 与理论落点相比误差明显减小, 模型能够很好地模拟火箭残骸坠落过程.

相比全程采用高精度单步积分算法进行计算的动力学模型, 这种几何学与动力学组合计算模型计算精度相近, 计算量大大减少. 在同一计算机上, 本文模型完成一次落点计算所需时间小于 0.01 s, 而全程动力学模型完成一次落点计算所需时间大于 0.03 s. 本文模型计算量少, 实时性高.

3　结论

基于空间分层, 设计了一种采用几何模型与动力学模型组合的落点计算模型, 通过几何模型计算自由段的弹道参数和再入段起点参数, 再通过动力学模型, 采用四阶龙格–库塔法的高精度单步积分算法, 计算再入段的弹道参数, 经过修正最终获得落点计算结果. 与实际落点数据的结果对比分析表明, 本文模型设计科学合理, 精度较高, 而且计算量较小, 能够很好地满足航天发射任务火箭落点高精度实时快速计算的要求.

参考文献

[1] WANG Xingang, YAO Yi, LIU Yongzhi. The effect of random wind on the falling point of ballistic warhead during reentry [J]. *Tactical Missile Control Technol.*, 2006, **2**: 40-43 (汪新刚, 姚奕, 刘勇志. 再入段过程随机风对导弹弹头落点的影响 [J]. 战术导弹控制技术, 2006, **2**: 40-43)

[2] ZHAO Hanyuan. Aircraft Reentry Dynamics and Guidance [M]. Changsha: National University of Defense Technology Press, 1997 (赵汉元. 飞行器再入动力学和制导 [M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1997)

[3] SUN Meijuan, HAN Xiulin. Movement of free-falling body affected by air resistance and rotation of earth [J]. *J. Suzhou Univ.*, 2010, **25**(8): 10-11 (孙梅娟, 韩修林. 空气阻力与地球自转影响下自由落体的运动 [J]. 宿州学院学报, 2010, **25**(8): 10-11)

[4] ZHANG Yi, XIAO Longxu, WANG Shunhong. Ballistic Missile Ballistics [M]. Changsha: National University of Defense Technology Press, 2005 (张毅, 肖龙旭, 王顺宏. 弹道导弹弹道学 [M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2005)

[5] ZHANG Shouxin. The Basis of Exterior Ballistic Survey and Satellite Orbit Survey [M]. Changsha: National Defense Industry Press, 1999 (张守信. 外弹道测量与卫星轨道测量基础 [M]. 长沙: 国防工业出版社, 1999)

[6] ZHANG Xiaolong, ZHU Pingan, HU Chunsheng. A simple algorithm for distance and azimuth of missile-to-target based on longitude and latitude [J]. *Ordnance Indust. Autom.*, 2019, **38**(10): 7-9 (张晓龙, 朱平安, 胡春生. 基于经纬度的弹目距离和方位角简易算法 [J]. 兵工自动化, 2019, **38**(10): 7-9)

[7] SUN Lei, LIAN Pu, CHANG Xiaofei, *et al.* Near space atmosphere modeling and its effect on the aircraft [J]. *Command Control Simulat.*, 2016, **38**(5): 107-111 (孙磊, 廉璞, 常晓飞, 等. 临近空间大气环境建模及其对飞行器影响 [J]. 指挥控制与仿真, 2016, **38**(5): 107-111)

[8] ZHENG Wei. Research on Effect of Geophysical Disturbance Factors and the Compensation Method for Hit Accuracy of Long-range Ballistic Missile [D]. Changsha: Graduate School of National University of Defense Technology, 2006 (郑伟. 地球物理摄动因素对远程弹道导弹命中精度的影响分析及补偿方法研究 [D]. 长沙: 国防科学技术大学研究生院, 2006)

[9] ZHANG Jun. The correction algorithm of J2 perturbations of the earth oblateness based on kepler two-body motion [J]. *Aeros. Cont.*, 2014, **32**(6): 22-25 (张俊. 基于开普勒二体运动修正地球扁率 J_2 摄动项算法 [J]. 航天控制, 2014, **32**(6): 22-25)

[10] LIU Lin, TANG Jingshi. On the additional perturbation due to the change of coordinate system of earth satellites and the choice of reference systems [J]. *Chin. J. Space Sci.*, 2008, **28**(2): 164-168 (刘林, 汤靖师. 地球卫星运动中坐标系附加摄动与参考系选择问题 [J]. 空间科学学报, 2008, **28**(2): 164-168)

[11] HU Shaochun, SUN Chengqi, LIU Yiwu. On midcourse correction of transfer trajectory for halo orbiters [J]. *Aeros. Cont. Appl.*, 2012, **38**(5): 21-26 (胡少春, 孙承启, 刘一武. 日晕轨道卫星的转移轨道中途修正研究 [J]. 空间控制技术与应用, 2012, **38**(5): 21-26)