0254-6124/2021/41(2)-310–10 *Chin. J. Space Sci.* 空间科学学报

ZHANG Jiawen, ZHENG Jianhua, WANG Youliang, LI Mingtao. Trajectory design for solar approaching detection mission using multiple resonant gravity assists of the Venus (in Chinese). *Chin. J. Space Sci.*, 2021, **41**(2): 310-319. DOI:10.11728/cjss2021.02.310

基于金星共振借力的太阳抵近探测任务轨道设计

张佳文[1,2] 郑建华[1,2] 王有亮[1] 李明涛[1,2]

1(中国科学院国家空间科学中心 北京 100190)

2(中国科学院大学 北京 100049)

摘 要 对于太阳抵近探测任务, 从地球直接发射探测器至太阳附近需要消耗巨大能量, 通过多次金星借力飞行, 可有效降低地球发射能量 C_3 及中途变轨的燃料消耗. 本文研究基于金星共振借力的太阳抵近探测任务轨道优化设计, 建立了连续共振借力和混合共振借力的转移轨道优化设计模型, 并针对 2025－2028 年的发射窗口开展太阳抵近探测任务轨道优化设计. 仿真结果表明, 相比连续共振借力, 混合共振借力可以有效缩短太阳抵近探测任务的轨道转移时间, 对于地球发射能量 C_3 和中途变轨燃料消耗的影响未见明显的规律性, 能量降低与序列中的共振比相关.

关键词 太阳抵近探测, 共振借力, 轨道设计

中图分类号 V 412

Trajectory Design for Solar Approaching Detection Mission Using Multiple Resonant Gravity Assists of the Venus

ZHANG Jiawen[1,2] ZHENG Jianhua[1,2] WANG Youliang[1] LI Mingtao[1,2]

1(*National Space Science Center, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190)

2(*University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049)

Abstract To approach close to the Sun, direct launch from the Earth costs a lot of energy, which can be effectively reduced by the gravity assist of the Venus. In this paper, interplanetary transfer trajectories with multiple resonant gravity assists of the Venus are designed for a solar approaching detection mission. And design models for the trajectories with continuous resonant gravity assists, as well as resonant and non-resonant gravity assists combined are built. A mission launched between 2025 and 2028 is studied. The study shows that, compared with trajectory with continuous resonant gravity assists, trajectory with resonant and non-resonant gravity assists combined is useful for reducing transfer time of solar approaching detection mission. And its impact on the energy cost is not universal, which is related to the resonance ratio in the trajectory.

Key words Solar approaching detection, Resonant gravity assist, Trajectory design

2019-11-27 收到原稿, 2020-09-13 收到修定稿

E-mail: zhangjiawen0109@163.com

0 引言

深空探测任务飞行时间长, 转移所需能量大, 为了节约发射成本和降低燃料消耗, 很多深空探测任务都采用借力飞行技术. 借力飞行 (gravity assist/fly-by) 技术是指设计深空探测器轨道经过天体附近, 利用其引力进行加速、减速或转向. 为实现连续借力, 通过设计借力参数, 使得探测器借力后与借力天体之间形成共振轨道的借力飞行技术称为共振借力飞行 (resonant gravity assist).

截至目前, 国际上很多深空探测任务都采用了借力飞行技术, 其中应用共振借力飞行技术的任务中比较典型的有: 伽利略号木星探测任务 (Galileo), 采用金星–地球–地球借力 (VEEGA) 序列, 探测器经第一次地球借力后, 其轨道周期与地球轨道周期呈 2 : 1 关系; 帕克太阳探测器 (Parker Solar Probe, PSP), 采用 7 次金星借力 (V^7GA) 序列, 转移轨道中设计了 3 次共振借力, 分别实现探测器与金星轨道周期成 2 : 3, 1 : 2, 3 : 7 的比例关系.

共振借力飞行主要应用于多次借力的飞行任务中, 主要设计目标是: 将探测器借力后的轨道周期与借力天体轨道周期设计成一简单的整数比, 为下一次借力设计提供便利.

对于太阳抵近探测任务, 如果直接将探测器发射到远日点距离为 1 AU (AU 为天文单位), 近日点距离为 $10\,R_\mathrm{s}$ (R_s 为太阳半径) 的大椭圆轨道上, 需要的发射能量高达 $437\,\mathrm{km^2\cdot s^{-2}}$, 目前的运载火箭尚未达到这个发射能力, 因此通过借助行星的引力降低发射能量是必由之路.

对于太阳抵近探测任务, 20 世纪末即有研究提出通过木星借力将探测器转移至距离太阳 $4\sim15\,R_\mathrm{s}$ 的任务概念 [1,2]. 由于科学研究非常关注太阳极区位置, 因此设计探测器经木星借力后偏离黄道面, 沿高倾角轨道飞向太阳, 飞行时间为 3.5∼4 a. 这也是帕克太阳探测任务早期的轨道方案. 但是此方案中探测器飞至木星的路程远, 对其热控与能源系统要求非常高, 并且探测器最终目标轨道的周期长达 4 年, 使得有限的任务周期内可对太阳进行就位探测的时间极短, 有研究提出了 7 次金星借力的轨道转移方案 [3], 探测器预计 7 年后转移至近日点距离为 $9.8\,R_\mathrm{s}$、周期为 88 d 的观测轨道上, 对太阳进行就位观测.

实际上, Sukhanov[4] 在 1999 年即已提出通过内行星借力将探测器转移至太阳附近的轨道方案, 并设计了发射窗口在 2002 年, 通过金星、地球、火星的借力将探测器送至近日点距离为 $15\sim30\,R_\mathrm{s}$ 的轨道方案, 转移时间约为 4.5∼13.3 a.

近年来中国也开展了太阳抵近探测任务的预先研究. 本文通过建立连续共振借力轨道和混合共振借力轨道的优化设计模型, 针对 2025 年至 2028 年间发射, 任务时长小于 10 年并最终转移至距太阳小于 $10\,R_\mathrm{s}$ 的太阳抵近探测任务, 设计了通过金星共振借力实现转移的轨道方案, 得到混合共振借力轨道比连续共振借力轨道更节省转移时间的结论.

1 轨道动力学基础

深空探测器在太阳系内运动时会受到太阳和行星的引力, 这是一个非线性多体系统. 在轨道初步设计阶段, 为了简化计算, 通常利用圆锥曲线拼接法设计探测器飞行轨迹, 认为探测器在行星引力影响球之外时只受到太阳引力作用, 其轨道为日心轨道; 而运行在行星引力影响球之内时, 仅考虑此行星的引力, 探测器沿行星中心双曲线轨道运动 [5].

考虑到探测器在日心飞行段的时间和空间都比在行星附近飞行时大得多, 因而在计算行星借力飞行时, 将行星借力飞行近似为探测器在日心惯性系下获得的一个瞬时速度增量, 不考虑其位置变化, 假设借力瞬间完成, 这种近似模型称为行星借力飞行等效脉冲模型 [6].

1.1 借力飞行

在借力飞行等效脉冲模型中, 认为借力飞行瞬间探测器的日心位置与借力行星的日心位置相同, 并且借力飞行前后探测器的日心位置不变. 探测器进入与离开行星引力影响球时, 相对于行星的速度分别为双曲线进入剩余速度 $\boldsymbol{v}_\infty^-$ 和双曲线离开剩余速度 $\boldsymbol{v}_\infty^+$, 即

$$\boldsymbol{v}_\infty^- = \boldsymbol{v}^- - \boldsymbol{v}_\mathrm{p}, \quad \boldsymbol{v}_\infty^+ = \boldsymbol{v}^+ - \boldsymbol{v}_\mathrm{p}. \tag{1}$$

式中, $\boldsymbol{v}^-$ 与 $\boldsymbol{v}^+$ 分别为探测器借力前后的日心速度, $\boldsymbol{v}_\mathrm{p}$ 为借力飞行时行星的日心速度. 借力飞行过程中, 如果探测器不进行主动轨道机动, 其相对于行星沿双曲线轨道运动, 双曲线进入剩余速度与离开剩余速度相等, 即满足

$$v_\infty = \|\boldsymbol{v}_\infty^-\| = \|\boldsymbol{v}_\infty^+\|. \tag{2}$$

探测器借力飞行的轨迹如图 1 所示, 根据双曲线几何关系, 双曲线速度偏转角由下式确定:

$$\delta = 2\arcsin\frac{\mu_{\rm p}}{\mu_{\rm p} + r_{\rm h}v_\infty^2}. \tag{3}$$

式中, $r_{\rm h}$ 为双曲线轨道近星点半径, $\mu_{\rm p}$ 为借力行星的中心引力系数.

为计算借力后探测器的日心速度, 建立以借力行星为中心的借力飞行坐标系 $Pijk$, 如图 2 所示, 坐标系原点 P 选在借力行星中心, i 轴沿双曲线进入剩余速度 $\boldsymbol{v}_\infty^-$ 方向, k 轴选取垂直于双曲线进入剩余速度 $\boldsymbol{v}_\infty^-$ 与借力行星日心速度 $\boldsymbol{v}_{\rm p}$ 所决定的平面方向, j 轴与 i 轴和 k 轴构成右手坐标系, 三轴的单位矢量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 分别表示为

$$\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{v}_\infty^-}{v_\infty}, \boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{v}_\infty^- \times \boldsymbol{v}_{\rm p}}{\|\boldsymbol{v}_\infty^- \times \boldsymbol{v}_{\rm p}\|}, \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i}. \tag{4}$$

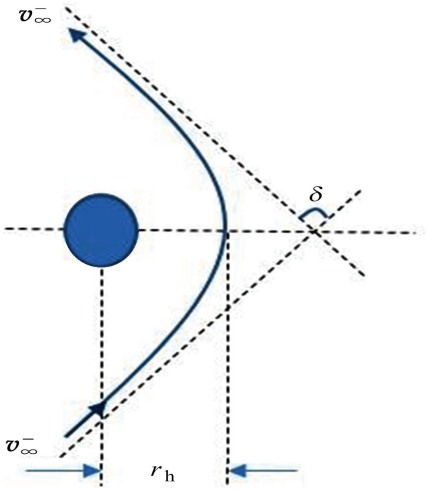

图 1 借力飞行双曲线轨道

Fig. 1 Gravity assist hyperbolic trajectory

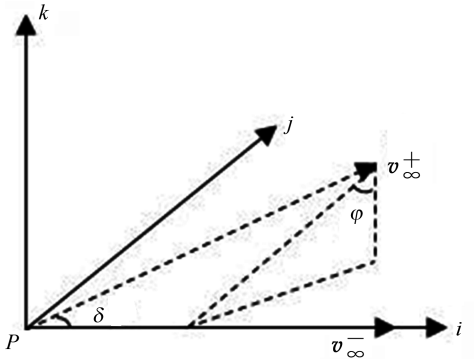

图 2 借力飞行坐标系

Fig. 2 Gravity assist frame of reference

在该坐标系下, 探测器的双曲线剩余速度可表示为

$$\boldsymbol{v}_\infty^- = v_\infty \boldsymbol{i}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{v}_\infty^+ = v_\infty(\sin\delta\cos\varphi\boldsymbol{k} + \sin\delta\sin\varphi\boldsymbol{j} + \cos\delta\boldsymbol{i}). \tag{6}$$

式中, φ 为 $\boldsymbol{v}_\infty^+$ 在 jk 平面上的投影与 k 轴的夹角, 取值范围为 $[0, 2\pi)$.

由于借力飞行过程中探测器双曲线轨道的近星点与行星表面距离不能小于安全高度 $h_{\rm p\,min}$ (事先设定), 相应地, δ 存在最大值 $\delta_{\max}$, 即

$$\delta_{\max} = 2\arcsin\frac{\mu_{\rm p}}{\mu_{\rm p} + (R_{\rm p} + h_{\rm p\,min})v_\infty^2}. \tag{7}$$

式中, $R_{\rm p}$ 为借力行星的半径.

对于无机动的借力飞行, 已知双曲线进入剩余速度 $\boldsymbol{v}_\infty^-$, 通过设计借力高度 $h_{\rm p}$ 和借力角度 φ, 可以得到借力后探测器的双曲线离开剩余速度 $\boldsymbol{v}_\infty^+$. 由于探测器以速度 $\boldsymbol{v}_\infty^+$ 离开借力行星时不一定能够到达下一个目标位置, 通常需要在借力飞行前后施加速度脉冲进行轨道修正.

1.2 共振借力

对于能量要求高的深空探测任务, 1 次借力飞行提供给探测器的能量有限, 为更好地发挥借力飞行效果, 可以设计连续利用同一颗行星进行多次借力飞行, 其中将借力飞行设计为共振借力是便捷有效的方法之一.

假设借力后探测器与借力行星的轨道周期比值为 N (共振轨道中周期比也称共振比), 则有

$$\frac{T_{\rm s}}{T_{\rm p}} = N. \tag{8}$$

式中, $T_{\rm s}$ 与 $T_{\rm p}$ 分别为探测器与借力行星轨道周期.

将行星日心速度投影在借力飞行坐标系下, 结合式 (6) 可以得到借力后探测器的日心速度, 即

$$\boldsymbol{v}_{\rm p} = v_{{\rm p}x}\boldsymbol{i} + v_{{\rm p}y}\boldsymbol{j} + v_{{\rm p}z}\boldsymbol{k}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{\rm s} =& (v_{{\rm p}z} + v_\infty\sin\delta\cos\varphi)\boldsymbol{k} + \\ & (v_{{\rm p}y} + v_\infty\sin\delta\sin\varphi)\boldsymbol{j} + \\ & (v_{{\rm p}x} + v_\infty\cos\delta)\boldsymbol{i}.\end{aligned} \tag{10}$$

结合二体运动能量守恒关系, 整理得到如下关系:

$$\frac{\dfrac{\mu}{a_{\rm p}}(1 - N^{-2/3}) - 2v_{{\rm p}x}v_\infty\cos\delta - v_\infty^2}{2v_\infty\sin\delta} = R. \tag{11}$$

其中, μ 为太阳中心引力常数, $a_{\rm p}$ 为借力行星轨道半

长轴

$$R=\sqrt{v_{\mathrm{pz}}^2+v_{\mathrm{py}}^2}\sin(\varphi+\theta),\theta=\arctan\frac{v_{\mathrm{pz}}}{v_{\mathrm{py}}}. \tag{12}$$

记作

$$\frac{R}{\sqrt{v_{\mathrm{pz}}^2+v_{\mathrm{py}}^2}}=Q. \tag{13}$$

则有

$$Q=\sin(\varphi+\theta). \tag{14}$$

因此, 探测器借力后能够与借力行星形成共振轨道的充要条件为

$$-1\leqslant Q\leqslant 1. \tag{15}$$

相应地,

$$\varphi=\begin{cases}\arcsin Q-\theta,\\ s\pi-\arcsin Q-\theta.\end{cases}$$
$$s=\begin{cases}1, & 0\leqslant Q\leqslant 1;\\ -1, & -1\leqslant Q\leqslant 0.\end{cases} \tag{16}$$

观察式 (14), Q 中含有借力角度 φ, 联系式 (11)~(13), Q 的表达式中含有借力高度决定的角度 δ, 因此在满足共振借力的充要条件下, 这两个角度中只要确定一个, 另一个即可确定, 这说明在设计共振借力飞行时, 给定共振比与借力高度 (偏转角度 δ 随之确定), 借力角度 φ 即随之确定.

2 轨道优化模型与方法

2.1 连续共振借力轨道优化模型

考虑连续共振借力 $(n-1)$ 次, 最后一次非共振借力的 $\mathrm{V}^n\mathrm{GA}$ 轨道模型 [7] 如图 3 所示.

为了在共振借力后实现给定共振比, 在每次共振借力前施加速度脉冲 $\Delta\boldsymbol{v}_i$ 修正轨道. 对应的决策变量为

$$\boldsymbol{X}=\left\{\begin{array}{c}t_0,\Delta t_1,\Delta v_{1x},\Delta v_{1y},\Delta v_{1z},r_{\mathrm{p}1},N_1,\cdots,\\ \Delta v_{(n-1)x},\Delta v_{(n-1)y},\Delta v_{(n-1)z},r_{\mathrm{p}(n-1)},\\ N_{(n-1)},r_{\mathrm{p}n},\varphi_n\end{array}\right\}. \tag{17}$$

式中, t_0 为地球出发时间; Δt_1 为地球出发至第一次金星借力的转移时间; Δv_{ix}, Δv_{iy}, Δv_{iz} 分别为每次共振借力前在速度三个方向施加的速度增量; $r_{\mathrm{p}i}$ 为借力高度; φ_n 为第 n 次借力的偏转角度; N_i 为共振借力要实现的共振比, 具体形式为

$$N_i=T_{\mathrm{s}i}:T_{\mathrm{venus}}=K_i:J_i. \tag{18}$$

其中, $T_{\mathrm{s}i}$ 为探测器轨道周期, T_{venus} 为金星轨道周期. 相应地, 第 i 次共振借力至第 $(i+1)$ 次借力之间的转移时间为

$$\Delta t_{(i+1)}=K_i\cdot T_{\mathrm{venus}}. \tag{19}$$

根据前文分析, 前 $(n-1)$ 次共振借力只需设计借力高度与共振比即可完成, 第 n 次非共振借力需要通过借力高度与借力角度 φ_n 共同设计.

在优化计算中, 行星的位置由行星星历表得到, 即

$$\boldsymbol{P}_i=W(P_{\mathrm{planet},i},t_i). \tag{20}$$

其中,

$$t_i=t_0+\sum_{j=1}^{i}\Delta t_j. \tag{21}$$

在此模型的轨道设计中, 希望得到低能耗转移轨道, 对应的优化目标为

$$\min: f_1(\boldsymbol{X})=C_3=\|\boldsymbol{V}_{\mathrm{dep}}-\boldsymbol{V}_{\mathrm{earth}}\|^2, \tag{22}$$

$$\min: f_2(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{\Delta v_{ix}^2+\Delta v_{iy}^2+\Delta v_{iz}^2}, \tag{23}$$

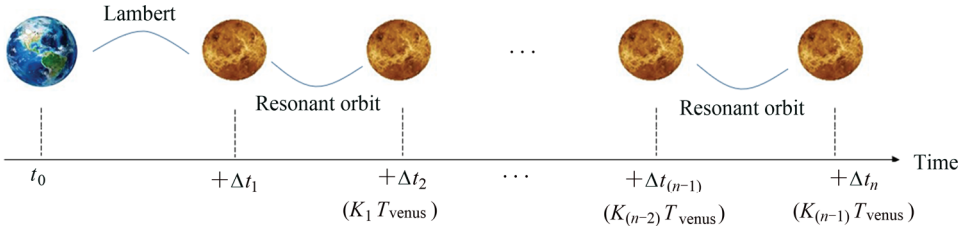

图 3 连续共振借力轨道模型

Fig. 3 Continuous resonant gravity assists trajectory model

$$\min: f_3(\boldsymbol{X}) = P_{rn} = a_n(1-e_n). \tag{24}$$

式中, $\boldsymbol{V}_{\rm dep}$ 为探测器发射时的日心速度; $\boldsymbol{V}_{\rm earth}$ 为发射时地球的日心速度; C_3 为地球发射能量; a_n, e_n, P_{rn} 分别为最后一次借力后探测器轨道的半长轴、偏心率和近日点距离.

约束条件为

$$r_{{\rm p}i} \geqslant r_{\rm p\,min}. \tag{25}$$

其中, $r_{\rm p\,min}$ 为借力高度约束.

2.2 混合共振借力轨道优化模型

考虑共振借力与非共振借力交替, 最后再补充 1 次非共振借力, 其 V^{n}GA 轨道模型如图 4 所示, 其中 n 为奇数, 相应的轨道包含 $(n-1)/2$ 次共振借力和 $(n+1)/2$ 次非共振借力.

同样地, 对于共振借力, 为了在借力后实现给定共振比, 每次借力前施加脉冲机动 $\Delta\boldsymbol{v}_i$ 修正轨道. 对应的决策变量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X} = \{&t_0, \Delta t_1, \Delta v_{1x}, \Delta v_{1y}, \Delta v_{1z}, r_{\rm p1}, N_1,\\ &r_{\rm p2}, \varphi_2, \cdots, r_{{\rm p}(n-1)}, \varphi_{(n-1)}, \Delta t_n, r_{\rm pn}, \varphi_n\}.\end{aligned} \tag{26}$$

式中, t_0 为地球出发时间; Δt_1 为地球出发至第 1 次金星借力的转移时间; Δv_{ix}, Δv_{iy}, Δv_{iz} 分别为每次共振借力前在速度三个方向施加的速度脉冲; $r_{{\rm p}i}$ 为借力高度; φ_i 为非共振借力的角度; N_i 为共振借力要实现的共振比, 即

$$N_i = T_{{\rm s}i} : T_{\rm venus} = K_i : J_i. \tag{27}$$

其中, $T_{{\rm s}i}$ 为探测器轨道周期, $T_{\rm venus}$ 为金星轨道周期. 相应的第 i 次共振借力 (i 为奇数) 至第 $(i+1)$ 次非共振借力之间转移时间为

$$\Delta t_{(i+1)} = K_i T_{\rm venus}. \tag{28}$$

而第 i 次非共振借力 (i 为偶数) 至第 $(i+1)$ 次借力之间的转移时间 $\Delta t_{(i+1)}$ 需要通过设计给出, 例如 Δt_3, Δt_5, $\cdots$, Δt_n.

这里借力飞行的设计方法与连续共振借力轨道设计模型中相同, 不同的是, 需要通过求解 Lambert 问题对非共振借力与下一次借力之间的轨道进行拼接, 为了匹配能量, 需要在每一次非共振借力后施加速度脉冲, 其将与共振借力前施加的速度脉冲共同作为优化目标.

在仿真计算中, 行星位置获取方法及约束条件与连续共振借力轨道设计模型中相同, 由于此模型希望得到低能耗快速转移轨道, 对应的优化目标在前者模型的基础上, 多出一个转移时间的目标函数, 即

$$\min: f_4(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i. \tag{29}$$

2.3 优化方法

这里的优化计算采用差分进化算法 (Differential Evolution Algorithm, DE), 此算法是基于群体的启发式搜索算法, 进化流程中包括变异、交叉和选择操作. DE 算法采用浮点数矢量进行编码生成种群中的个体, 其寻优过程的步骤为: ①从父代中选择 2 个个体进行矢量带权做差生成差分矢量, 选择另一个体与差分矢量求和生成实验个体, 这一步为变异操作; ②对父代个体与实验个体进行交叉操作, 生成新的子代个体; ③在父代个体与子代个体之间进行选择操作, 将符合要求的个体保留到下一代.

由于 DE 算法新颖的变异操作, 其在迭代初期具有较强的全局搜索能力, 而在迭代后期具有较强的局部搜索能力, 相比其他同类方法具有待定参数少、不易陷入局部最优且收敛速度快 [8] 的优点.

在数值仿真中应用差分进化算法 [9] 时, 由于决

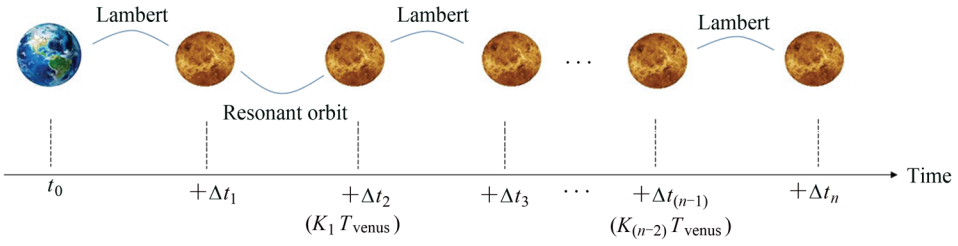

图 4 混合共振借力轨道模型

Fig. 4 Resonant and non-resonant gravity assists combined trajectory model

策变量 $\boldsymbol{X}$ 包含的变量个数 l 较大, 设置种群中个体数量为 $50l$~$60l$, 最大迭代代数为 $1500l$~$2000l$; 变异操作权重设置为 0.75, 交叉率取为 0.99. 对于优化模型中的多个优化目标, 通过加权的方式进行处理 [10]. 在连续共振借力轨道优化模型的仿真计算中, 优化函数设置为

$$F(\boldsymbol{X}) = k_1 C_3 + k_2 \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\Delta v_{ix}^2 + \Delta v_{iy}^2 + \Delta v_{iz}^2} + k_3 P_{rn}. \tag{30}$$

混合共振借力轨道优化模型仿真计算中, 优化函数设置为

$$F(\boldsymbol{X}) = k_1 C_3 + k_2 \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\Delta v_{ix}^2 + \Delta v_{iy}^2 + \Delta v_{iz}^2} + k_3 P_{rn} + k_4 \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i. \tag{31}$$

其中, k_1, k_2, k_3, k_4 为权重系数, 在 DE 算法执行过程中取值如下:

$$k_1 = \begin{cases} 1000, & C_3 > C_{3\max}; \\ 10, & C_3 \leqslant C_{3\max}. \end{cases} \tag{32}$$

$$k_2 = 1000, \tag{33}$$

$$k_3 = \begin{cases} 1000, & P_{rn} > P_{rnw}; \\ 1, & P_{rn} \leqslant P_{rnw}. \end{cases} \tag{34}$$

$$k_4 = \begin{cases} 1000, & \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i > T_{\max}; \\ 1, & \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \leqslant T_{\max}. \end{cases} \tag{35}$$

其中, $C_{3\max}$ 为仿真中设置的最大发射能量值, P_{rnw} 为探测器最终抵达轨道的近日点距离最大值, $T_{\max}$ 为探测器最大转移时间. 这样设置权重系数后, 对不符合轨道设计要求的解进行惩罚, 进而自动舍弃.

3 数值仿真

3.1 任务分析

从地球出发的探测器可以通过两种霍曼转移方式直接转移至远日点在金星轨道处、近日点距离为 $10\,R_s$ 的大椭圆轨道上, 其消耗的能量非常大, 具体参数列于表 1, 转移轨道如图 5 所示.

从表 1 中的数据可以看出, 探测器直接转移消耗能量巨大, 需借助行星引力降低发射能量和转移过程中的燃料消耗. 对于太阳抵近探测任务, 探测器飞向内太阳系, 内行星的位置与轨道周期比外行星更适合此任务. 对比水星、金星和地球: 水星的质量偏小, 单次借力对探测器轨道改变的能力较弱; 金星质量略小于地球, 而轨道周期更短, 对于多次借力的转移方案更具有时间优势, 因此选择金星作为借力天体.

当探测器从地球出发, 为了得到通过 1 次金星借力可使其到达的轨道近日点距离与发射能量的关系, 在 2025 年的发射窗口内搜索 VGA 序列, 得到的优化结果如图 6 所示.

由图 6 可以看到, 若要探测器以可接受的发射能量转移到近日点距离小于 $10\,R_s$ 的观测轨道上, 1 次金星借力远远不够, 必须进行多次金星借力. 接下来分析并设计金星共振借力轨道.

从单次金星借力 VGA 序列的计算结果可以得到, 当发射能量 C_3 为 $150\,\mathrm{km^2{\cdot}s^{-2}}$ 时, 1 次金星借力后探测器的轨道近日点距离为 $33.7386\,R_s$, 轨道半长轴为 $0.7123\,a_{\mathrm{venus}}$ (a_{venus} 为金星的轨道半长轴), 探

表 1 霍曼转移能量消耗

Table 1 Hohmann transfer's energy consumption

	转移方式 1	转移方式 2
地球发射能量 $C_3/(\mathrm{km^2{\cdot}s^{-2}})$	437.0768	6.2269
$\Delta v_2/(\mathrm{km{\cdot}s^{-1}})$	1.6021	25.5560

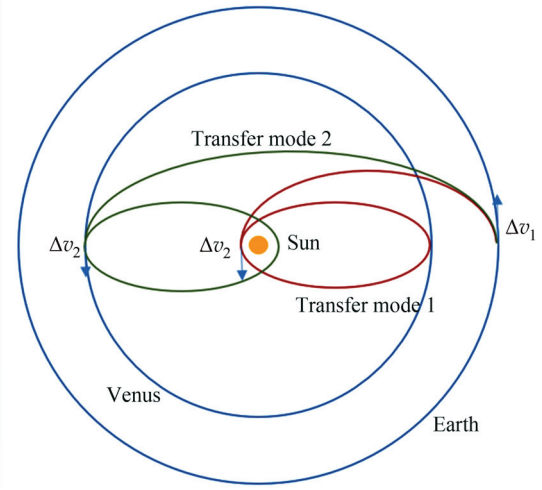

图 5 霍曼转移轨道

Fig. 5 Hohmann transfer orbit

测器与金星轨道周期比为 0.6012. 而对于近日点距离为 $10\,R_{\rm s}$、远日点距离为 $1\,a_{\rm venus}$ 的轨道, 其轨道半长轴为 $0.5314\,a_{\rm venus}$, 相应与金星轨道周期比为 0.3882.

如果将发射能量 C_3 约束在 $150\,{\rm km^2\cdot s^{-2}}$ 左右, 为了充分发挥金星借力的作用, 在第一次借力后, 限制探测器与金星的轨道周期比不大于 2 : 3 (0.6667); 而最后一次共振借力后探测器与金星周期比至少为 3 : 8 (0.375), 这样, 最多需要补充 1 次借力飞行探测器轨道的近日点距离即可降低至 $10\,R_{\rm s}$ 以内.

由于存在最小借力高度的约束, 单次借力对探测器轨道改变的程度有限, 因此共振借力可实现的共振比有限. 在设计共振借力的共振比时, 需同时考虑借力时探测器的轨道能量以及此周期比对应的转移时间是否合理. 例如: 探测器与金星的轨道周期比为 2 : 3 (0.6667) 时, 二者飞行 $2\,T_{\rm venus}$ ($T_{\rm venus}$ = 224.7 d, 为金星公转周期) 后即可相遇; 当探测器与金星周期比为 5 : 8 (0.625) 时, 二者需要飞行 $5\,T_{\rm venus}$ 后才可以相遇. 这两个例子中, 虽然二者周期比值相近, 但是所需飞行时间相差 674 d 左右. 因此, 为缩短探测器的转移时间, 在本文的仿真计算中, 定义共振比为 $K:J$ ($K:J=T_{\rm s}:T_{\rm venus}$, $T_{\rm s}$ 为探测器周期), 仅考虑 $K<5$ 的情况.

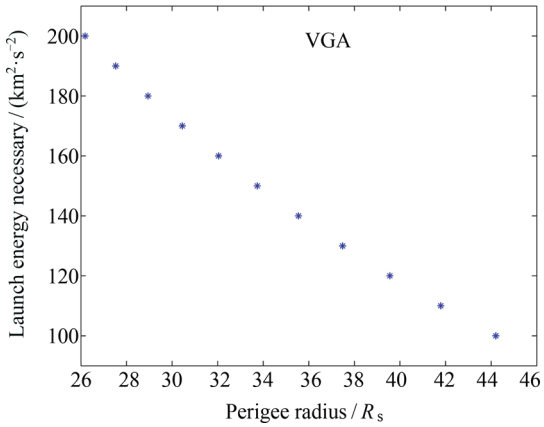

图 6 VGA 地球发射能量与轨道近日点距离关系

Fig. 6 Relationship between Earth's launch energy and the orbit's perigee radius in VGA

综上分析, 设计共振借力轨道时, 考虑采用表 2 中的共振比.

3.2 仿真结果

根据以上分析, 针对太阳抵近探测任务, 组合共振比, 分别设计金星连续共振借力轨道与混合共振借力轨道. 对 2025 年至 2028 年间采用不同飞行序列飞向太阳的发射机会进行搜索. 结合未来运载火箭可能的发射能力, 假设从地球出发时运载火箭可为探测器提供的发射能量 C_3 最多为 $160\,{\rm km^2\cdot s^{-2}}$, 目标轨道为近日点距离小于 $10\,R_{\rm s}$ 的日心椭圆轨道, 约束任务时间在 10 年以内.

3.2.1 连续共振借力轨道结果

设计采用 5 次连续共振借力的 $\rm V^6GA$ 轨道序列, 将不同共振比飞行序列得到的优化结果列于表 3.

表 3 中共振比序列为 2 : 3, 4 : 7, 1 : 2, 4 : 9, 3 : 7 的轨道方案详细参数列于表 4, 轨道迹线如图 7 所示.

3.2.2 混合共振借力轨道结果

根据前文分析以及表 3 中的结果可以看出, 共振借力的共振比值直接决定了连续共振借力轨道方

表 2 轨道设计中考虑的共振比

Table 2 Resonance ratio considered in trajectory design

共振比	共振比 ($T_{\rm s}:T_{\rm venus}$)
0.7∼0.6	2 : 3 (0.6667), 3 : 5 (0.6)
0.6∼0.5	4 : 7 (0.5714), 1 : 2 (0.5)
0.5∼0.4	4 : 9 (0.4444), 3 : 7 (0.4286), 2 : 5(0.4)
0.4∼0.3	3 : 8 (0.375)

表 3 $\rm V^6GA$ 优化结果

Table 3 Optimal trajectories of $\rm V^6GA$

共振比序列	发射时间 (UTC)	发射能量 $C_3/({\rm km^2\cdot s^{-2}})$	速度增量 /(km·s^{-1})	近日点距离/$R_{\rm s}$	转移时间/a
3 : 5, 4 : 7, 1 : 2, 4 : 9, 3 : 7	2026-08-08	159.4294	0.8298	9.9928	9.3468
2 : 3, 4 : 7, 1 : 2, 4 : 9, 3 : 7	**2026-08-06**	**159.9895**	**0.4053**	**9.9097**	**8.7589**
3 : 5, 4 : 7, 1 : 2, 4 : 9, 2 : 5	2028-03-17	159.9828	1.5333	8.7822	8.7574
2 : 3, 4 : 7, 1 : 2, 4 : 9, 2 : 5	2026-08-12	145.8231	1.6895	8.8665	8.1379

案的转移时间. 而 V^6GA 轨道序列中含有共振比为 4 : 7 与 4 : 9 的共振借力, 对应的借力后的轨道段需要 $4T_{venus}$ 的转移时间, 如果将需要较长转移时间的共振借力设计为非共振借力, 则有希望获得总转移时间相对更短的轨道方案. 因此, 改进 V^6GA 序列方案, 将共振比为 4 : 7 和 4 : 9 的共振借力替换成非共振借力, 并在第 6 次非共振借力后再补充 1 次金星借力, 设计为混合共振借力的 V^7GA 序列. 得到的优化结果见表 5, 其中 H 代表轨道中的非共振借力 (除最后一次借力外).

将表 5 中借力序列为 2 : 3, H, 1 : 2, H, 3 : 7, H 的轨道方案参数列于表 6, 其轨道迹线如图 8 所示.

3.2.3 结果分析

对比表 3 与表 5 中各方案的转移时间可以看到, 相比连续共振借力轨道模型的 V^6GA 轨道方案, 混合共振借力轨道模型的 V^7GA 轨道方案转移时间更短, 这是将转移时间长、共振比为 4 : 7 和 4 : 9 的共振借力替换为非共振借力的结果.

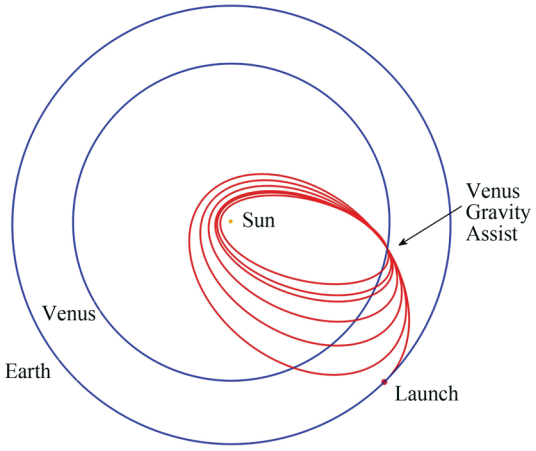

图 7 V^6GA 2 : 3, 4 : 7, 1 : 2, 4 : 9, 3 : 7 轨道

Fig. 7 Trajectory of V^6GA 2 : 3, 4 : 7, 1 : 2, 4 : 9, 3 : 7

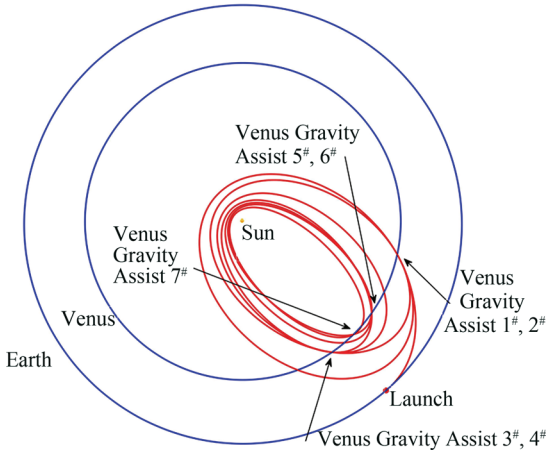

图 8 V^7GA 2 : 3, H, 1 : 2, H, 3 : 7, H 轨道

Fig. 8 Trajectory of V^7GA 2 : 3, H, 1 : 2, H, 3 : 7, H

表 4 V^6GA 序列 2 : 3, 4 : 7, 1 : 2, 4 : 9, 3 : 7 的轨道详细参数

Table 4 Detailed trajectory parameters of V^6GA 2 : 3, 4 : 7, 1 : 2, 4 : 9, 3 : 7

借力次数	借力行星	日期 (UTC)	速度增量/(km·s^{-1})	飞越高度/km	借力后		
					半长轴/a_{venus}	周期/d	近日点距离/R_s
1	金星	2026-09-28	0.0885	4755.2490	0.7631	149.8001 (2 : 3)	34.7082
2	金星	2027-12-22	0.0853	1453.4354	0.6886	128.3999 (4 : 7)	26.8522
3	金星	2030-06-08	0.0758	1074.5321	0.6300	112.3497 (1 : 2)	20.1891
4	金星	2031-01-18	0.0883	211.8421	0.5824	99.8663 (4 : 9)	14.4697
5	金星	2033-07-05	0.0672	1072.8396	0.5684	96.2996 (3 : 7)	12.7931
6	金星	2035-05-10	0	306.4152	0.5445	90.2836	9.9097

表 5 V^7GA 优化结果

Table 5 Optimal trajectories of V^7GA

共振比序列	发射时间 (UTC)	发射能量 C_3/(km^2·s^{-2})	速度增量/(km·s^{-1})	近日点距离/R_s	转移时间/a
3 : 5, H, 1 : 2, H, 3 : 7, H	2028-03-20	159.9948	0.1087	9.9995	7.4695
2 : 3, H, 1 : 2, H, 3 : 7, H	**2026-08-03**	**156.0602**	**0.0039**	**9.4716**	**6.2436**
3 : 5, H, 1 : 2, H, 2 : 5, H	2028-03-18	159.9939	2.1251	9.2655	6.2333
2 : 3, H, 1 : 2, H, 2 : 5, H	2028-03-19	159.9929	2.0454	9.2844	5.6176

表 6 V^7GA 2:3, H, 1:2, H, 3:7, H 轨道详细参数

Table 6 Detailed trajectory parameters of V^7GA 2:3, H, 1:2, H, 3:7, H

借力次数	行星	日期 (UTC)	速度增量/(km·s^{-1})	飞越高度/km	借力后		
					半长轴/a_{venus}	周期/d	近日点距离/R_s
1	金星	2026-09-27	0	4289.0415	0.7631	149.7971 (2:3)	35.1958
2	金星	2027-12-20	0.0018	1885.4761	0.6958	130.4017	27.4263
3	金星	2028-07-05	0	605.1109	0.6300	112.3478 (1:2)	19.8550
4	金星	2029-02-14	0.0007	2116.4463	0.5915	102.2228	15.4632
5	金星	2029-10-10	0	3962.3255	0.5684	96.2982 (3:7)	12.9036
6	金星	2031-08-15	0.0014	4506.3718	0.5522	92.2130	11.1412
7	金星	2032-10-31	0	200	0.5364	88.2821	9.4716

对比表 3 与表 5 中各方案所需速度增量可以发现, 将部分共振借力替换为非共振借力且增加 1 次非共振借力后, 前两个转移方案所需速度增量大小有所降低, 而后两个方案所需速度增量大小非但没有降低反而升高; 并且在两种轨道模型中, 前两个方案的速度增量都比后两个方案的小. 该现象主要是由共振比不同导致的, 见图 9 和图 10 各转移方案中每次借力施加的速度增量曲线.

在图 9 和图 10 中, 绿色、蓝色线分别代表前两个方案, 红色、青蓝色线分别代表后两个方案. 从曲线的变化趋势可以看出, 两种轨道模型中, 后两种方案均在第 5 次借力前施加较大的速度增量, 占整段轨道转移中所需速度增量的主要部分. 这主要是因为后两个方案中第 5 次借力后的共振比为 2:5 (0.4), 比前两个方案中第 5 次借力后的共振比 3:7 (0.4286) 小, 相应地, 探测器在借力后的轨道能量低, 而单次金星借力降低探测器轨道能量的能力有限, 因此需要探测器自身施加额外的机动能量降低探测器的能量. 因此, 共振比不同导致转移方案需要的速度增量存在差异.

此外, 对比图 9 和图 10 中的同色曲线可以看出, 用非共振借力替代共振比为 4:7 和 4:9 共振借力后: 前两个方案第 2, 3, 4, 5 次借力所需速度增量都有明显降低; 后两个方案第 2, 3, 4 次借力所需速度增量几乎不变, 保持较低数值, 第 5 次借力所需速度增量明显升高.

分析出现这个现象的可能原因: 前两个方案中, 在第 5 次借力前, 即将探测器与金星的周期比降为 3:7 之前, 探测器在同一位置以 4:7, 1:2, 4:9 的共振比序列降低能量, 未能充分利用金星借力改变轨

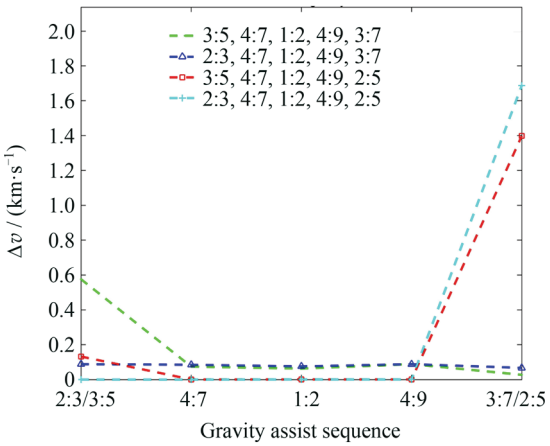

图 9 V^6GA 中每次借力所需速度增量曲线

Fig. 9 Delta-v needed of each gravity assist in V^6GA

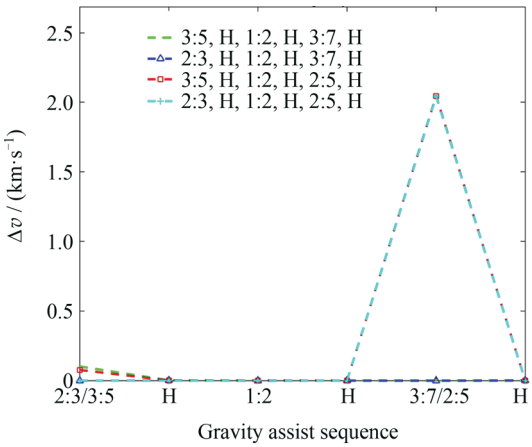

图 10 V^7GA 中每次借力所需速度增量曲线

Fig. 10 Delta-v needed of each gravity assist in V^7GA

道能量, 而调整共振比为 4 : 7 和 4 : 9 的共振借力为非共振借力后, 优化得到了更加合适的借力方位与能量降低顺序, 金星的借力效果得到充分利用, 降低了速度增量需求; 对于后两个方案, 在第 5 次借力前, 即将探测器与金星的周期比降低为 2 : 5 之前, 探测器在同一位置以 4 : 7, 1 : 2, 4 : 9 这样的共振比序列降低轨道能量比较合理, 调整共振比为 4 : 7 和 4 : 9 的共振借力为非共振借力后反而破坏了合适的借力方位, 并且导致在第 5 次借力前需要更多的机动能量来调整轨道.

结合上述分析可以看出: 相比连续共振借力轨道模型的 V^6GA 轨道方案, 混合共振借力轨道模型的 V^7GA 轨道方案转移时间更短, 而对于地球发射能量 C_3 与中途变轨所需速度增量的改变没有普遍规律, 中途变轨所需速度增量主要与借力序列中共振比数值有关, 对于一些共振比序列的轨道, 混合共振借力轨道可降低能量需求, 而对于其他一些轨道, 反而需要消耗更多的能量.

4 结论

针对太阳抵近探测任务, 提出利用金星多次共振借力的轨道设计方法, 建立了连续共振借力轨道与混合共振借力轨道优化设计模型, 并针对 2025 年至 2028 年的发射窗口, 分别设计了连续共振借力的 V^6GA 以及混合共振借力的 V^7GA 轨道方案. 研究结论如下.

(1) 太阳抵近探测任务中, 多次金星借力可以降低发射能量和转移途中变轨的燃料消耗.

(2) 2025—2028 年期间, 在发射能量 C_3 不超过 $160\,\mathrm{km^2\cdot s^{-2}}$, 转移时间不超过 10 年, 最终轨道近日点距离小于 $10\,R_\mathrm{s}$ 的约束下, 两种轨道方案的最优序列分别为: 2 : 3, 4 : 7, 1 : 2, 4 : 9, 3 : 7 (V^6GA, 2026 年); 2 : 3, H, 1 : 2, H, 3 : 7, H (V^7GA, 2026 年).

(3) 2026 年 8 月 3 日发射的 V^7GA 2 : 3, H, 1 : 2, H, 3 : 7, H 轨道方案, 探测器以 $156.0602\,\mathrm{km^2\cdot s^{-2}}$ 的发射能量从地球出发, 先后经过 7 次金星借力, 途中几乎不消耗变轨燃料 (变轨速度增量为 $0.0039\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$), 飞行 6.2476 a 后, 转移至近日点距离为 $9.4716\,R_\mathrm{s}$、周期为 88.2821 d 的观测轨道上.

(4) 相比连续共振借力轨道, 混合共振借力轨道可有效缩短太阳抵近探测任务的轨道转移时间, 而对于地球发射能量 C_3 与中途变轨所需速度增量的改变没有普遍规律, 这与序列中的共振比有关.

参考文献

[1] GALEEV A A, VAISBERG O L, ZAKHAROV A V, *et al.* Project Ziolkovsky-Solar Probe mission concept [J]. *Adv. Space Res.*, 1996, **17**(3): 13-20

[2] TSURUTANI B T, VAISBERG O L. The Solar Probe mission and comments on plasma wave observations [C]//AIP Conference Proceeding. New York: AIP Press, 1996: 255

[3] GUO Y. Trajectory design of Solar Probe+ using multiple Venus gravity assists [C]//AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit. Honolulu, Hawaii: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2008: 3029-3039

[4] SUKHANOV A A. Close approach to Sun using gravity assists of the inner planets [J]. *Acta Astron.*, 1999, **45**: 177-185

[5] QIAO Dong. Study of Transfer Trajectory Design Method for Deep Space Exploration and Application to Small Body Exploration [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2007 (乔栋. 深空探测转移轨道设计方法研究及在小天体探测中的应用 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2007)

[6] LI Junfeng, BAOYIN Hexi, JIANG Fanghua. Dynamics and Control of Interplanetary Flight [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2014: 110-127 (李俊峰, 宝音贺西, 蒋方华. 深空探测动力学与控制 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2014: 110-127)

[7] YUAN Jianping, ZHAO Yushan, TANG Geshi, *et al.* Spacecraft Deep Space Flight Trajectory Design [M]. Beijing: China Astronautic Publishing House, 2014: 59-76 (袁建平, 赵育善, 唐歌实, 等. 航天器深空飞行轨道设计 [M]. 北京: 中国宇航出版社, 2014: 59-76)

[8] HU Zhongbo. The Study of Differential Evolution Algorithm for the Function Optimization [D]. Wuhan: Wuhan University of Technology, 2006 (胡中波. 差分演化算法及其在函数优化中的应用研究 [D]. 武汉: 武汉理工大学, 2006)

[9] Differential evolution (DE) for continuous function optimization (an algorithm by Kenneth Price and Rainer Storn) [OL]. [2019-10-10] http://www1.icsi.berkeley.edu/~storn/code.html#tevc

[10] LI Xiaoyu. Design and Optimization of Deep Space Trajectory on the Initial Design Stage [D]. Beijing: University of Chinese Academy of Sciences, 2012 (李小玉. 深空探测轨道的初始方案设计与优化 [D]. 北京: 中国科学院大学, 2012)