第16卷 第4期 空间科学学报 Vol.16, No.4
1996 年10月 CHINESE JOURNAL OF SPACE SCIENCE Oct , 1996

带梁式伸展附件航天器动力学分析*

朱桂东 王本利 邵成勋
(哈尔滨工业大学航天工程与力学系，150001)

关键词 航天器动力学，伸展，柔性附件

引 言

大型柔性可展开航天结构已被广泛地应用，并且向着大型化、轻型化、复杂化方向发展．目前可展开航天结构主要有三种：弹出式、折叠展开式和膨胀式结构．由于技术和安全性等方面的原因，目前航天器上的可展开结构并不很大，且展开方式较为简单．本文考虑的结构即是一种简单的弹出式结构．

中心刚体带细长柔性附件的力学模型代表了一大类的航天器结构，这种模型最初被用来分析附件振动及其与姿态控制系统的相互作用，目前大部分伸展动力学研究也是基于这一模型．Lips[1]和 Modi[2]等人研究了在轨航天器的伸展动力学问题，并给出以 Lagrange 方程表示的动力学模型；Ibrahim[3]对带对称薄板的航天器姿态动力学进行了数值仿真；文献[4]则给出一种近似解析解法；以及在伸展过程中环境干扰对系统影响的研究[5]．本文针对这一模型，研究其姿态动力学及附件振动问题．建立带若干可伸展附件航天器的姿态动力学方程，并将这一非线性时变系统线性化，提供可供动力学分析及控制分析的动力学模型．分析伸展规律对系统响应的影响，得出伸展规律选择的依据，同时给出数值仿真结果．

一、动力学模型的建立

本文考虑悬臂梁式附件，仍然用定长梁的特征函数来叠加形成伸展梁的位移，只是特征函数中的位置参量不再是常数，而是随时间变化的．基于这种特征函数叠加方法，建立以姿态角和‘广义模态坐标’(特征函数的叠加系数)表示的伸展动力学模型．

考虑图 1 所示结构中心刚体绕定点 O 转动，带 n 个可伸梁，每根梁的伸展方向均通过 O 点，梁未伸展部分的质量集中 e_i 点．其中 I_0 为中心刚体绕 O 点的转动惯量，p_i 为梁 i 的伸出口 o_i 到原点的距离，$O-x$ 为惯性坐标轴，θ_i 为梁 i 的伸展方向坐标，d_i 为 e_i 到 O 的距离，l_{oi} 为初始时刻梁 i 于刚体外的长度，m_{0i} 为在初始时刻 e_i 点的集中质量，因此，梁 i 的质量为 $m_{0i}+\rho_i(p_i+l_{0i}-d_i)$，$\rho_i$ 为梁已伸出部分的单位长度质量密度，u_i，v_i 分别为梁的弹性位移．将 u_i 用特征函数展开

* 国家自然科学基金资助项目．
本文于 1995 年 10 月 26 日收到，修改稿于 1996 年 3 月 14 日收到．

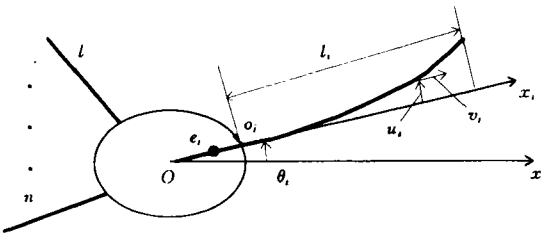


图 1　可伸展航天器结构

Fig. 1　Deployable spacecraft structure

$$u_i(x_i,\ t)=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_{ij}(t)\varphi_{ij}(\xi_i),\quad \xi_i=x_i/l_i,\ i=1,2,\cdots,n,$$

称 η_{ij} 为广义模态坐标，在推导方程时将取前 m_i 项作为近似. 此时 $\varphi_{ij}(\xi_i)$ 亦随着时间变化，故有

$$\frac{\partial u_i(x_i,\ t)}{\partial t}=\sum_{j=1}^{\infty}\dot{\eta}_{ij}\varphi_{ij}(\xi_i)-\dot{l}/l\sum_{j=0}^{\infty}\eta_{ij}\xi_i\varphi'_{ij}(\xi_i),\quad \varphi'_{ij}(\xi_i)=\frac{\partial\varphi_{ij}(\xi_i)}{\partial\xi_i},\ i=1,2,\cdots,n.$$

用 Lagrange 方程来推导系统动力学方程. 系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}I_r\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i}\rho_i\left\{(\dot{l}_i+v_i)^2+\left[(p_i+x_i)\dot{\theta}+\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{x_i\dot{l}_i}{l_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right]^2\right\}\mathrm{d}x_i,$$

其中 I_r 为刚体部分的转动惯量. 纵向弹性位移的表达式为

$$v_i=-\frac{1}{2}\int_0^{x_i}\left(\frac{\partial u_i(x_i,t)}{\partial x_i}\right)^2\mathrm{d}x_i,\ i=1,2,\cdots,n.$$

忽略高阶小量，可将动能写成 $T=T_r+T_v+T_c$，T_r 为由于刚体运动产生的动能，T_v 为振动能量，T_c 为刚体运动和弹性振动的耦合项. 系统的弹性势能为

$$V=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i}EI_i\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}\right)^2\mathrm{d}x_i.$$

将重力考虑在外载荷中，取系统的广义坐标为 q，l，$q=[\theta,\ \eta_1^T,\ \eta_2^T,\cdots,\eta_n^T]^T$，$\eta_i=[\eta_{i1},\ \eta_{i2},\cdots,\eta_{im_i}]^T$，$l=[l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_n]^T$，$\theta$ 为刚体姿态角，可得到系统的 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{\partial V}{\partial q}=Q_q,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{l}}\right)-\frac{\partial T}{\partial l}+\frac{\partial V}{\partial l}=Q_l. \tag{1}$$

由于非线性的起因是伸展和刚体转动引起的科氏加速度项，将伸展规律作为已知，讨论不同的伸展规律时系统的行为，则左式即变为关于 q 的线性时变微分方程组，通过右式可以求出梁伸出端点的作用力. 左式经整理可得

$$M\ddot{q}+D\dot{q}+Kq=Q_q. \tag{2}$$

其中 $M=[M_{ij}]$, $D=[D_{ij}]$, $K=[K_{ij}]$, $i,j=1,2,\cdots,n+1$,

$$M_{11}=I_0+\sum_{i=1}^{n}[m_{0i}-\rho_i(l_i-l_{0i})]d_i^2+\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n}\rho_i(l_i+p_i-d_i)[(l_i+p_i)^2+(l_i+p_i)d_i+d_i^2],$$

$$M_{1i}=M_{i1}^T=\rho_i l_i\int_0^1(p_i+\xi_i l_i)\Phi_i^T\mathrm{d}\xi_i,\quad M_{ii}=\rho_i l_i\int_0^1\Phi_i\Phi_i^T\mathrm{d}\xi_i,$$

$$D_{11}=\rho_i\dot{l}_i[(l_i+p_i)^2-d_i^2],$$

$$D_{1i}=-D_{i1}^T=2\rho_i\ddot{l}_i p_i\int_0^1\Phi_i'^T\mathrm{d}\xi_i+2\rho_i(\ddot{l}_i l_i+\dot{l}_i^2)\int_0^1\xi_i\Phi_i'^T\mathrm{d}\xi_i,\quad D_{ii}=\rho_i\dot{l}_i\int_0^1\Phi\Phi^T\mathrm{d}\xi_i,$$

$$K_{1i}=K_{i1}^T=2\rho_i\ddot{l}_i p_i\int_0^1\Phi_{1T}'^T\mathrm{d}\xi_i+2\rho_i(\ddot{l}_i l_i+l_i^2)\int_0^1\xi_i\Phi_{iT}'^T\mathrm{d}\xi_i,$$

$$K_{ii}=\frac{EI_i}{l_i^3}\int_0^1\Phi_i''\Phi_i''^T\mathrm{d}\xi_i-\frac{\rho_i\dot{l}_i^2}{l_i}\int_0^1(1-\xi_i)^2\Phi_i'\Phi_i'^T\mathrm{d}\xi_i,$$

$$\Phi_i=[\varphi_{i1},\varphi_{i2},\cdots,\varphi_{im_i}],\quad \Phi_i'=\frac{\partial\Phi_i}{\partial\xi_i},\quad \Phi_i''=\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial\xi_i^2},\quad i=2,3,\cdots n+1,\quad Q_q=BF.$$

F为外载荷矢量，B为转换矩阵，其余元素均为零. 令 $X=[q^T,\ \dot{q}^T]^T$, 可将(2)式变换成状态空间形式:

$$\dot{X}=AX+Q,\ A=\begin{bmatrix}D & M\\ M & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-K & 0\\ 0 & M\end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix}Q_q\\ 0\end{bmatrix}. \tag{3}$$

此伸展动力学方程与非伸展情况大不相同，不仅产生阻尼项，并且刚度矩阵亦有所改变. 阻尼矩阵元素的正负与伸展长度、速度、加速度均有关系. 因此，伸展规律对系统的动态响应有很大影响，在某些情况下可能会引起系统的不稳定. 以下的数值仿真也说明了这一点.

二、数 值 仿 真

梁的位移展开式中的 $\varphi_{ij}(\xi_i)$ 有不同的选取方法，这里取文献[6]中的形式

$$\varphi_{ij}(\xi)=[\cosh(\lambda_j\xi)-\cos(\lambda_j\xi)]-\sigma_j[\sinh(\lambda_j\xi)-\sin(\lambda_j\xi)],$$

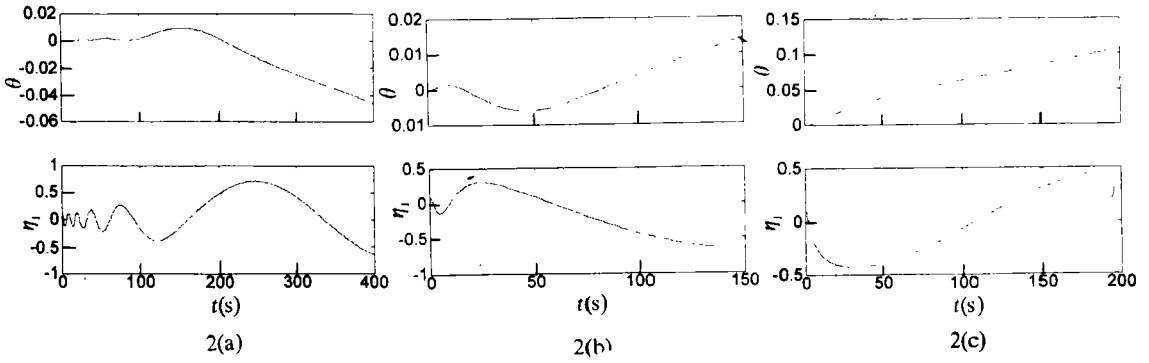
$$\sigma_j=(\cosh\lambda_j+\cos\lambda_j)\ /(\sinh\lambda_j+\sin\lambda_j),\ j=1,2,\cdots.$$

$\lambda_j(j=1,2,\cdots)$ 为超越方程 $1+\cosh\lambda\cos\lambda=0$ 的根，此特征函数序列具有正交性，即

$$\int_0^1\varphi_{ij}\varphi_{ik}\mathrm{d}\xi=\delta_{jk},\quad j,k=1,2,\cdots.$$

现在研究在同一初始条件下，不同伸展规律时系统的动态过程. 为能更清楚地说明伸展规律的影响，这里取只有一根可伸展梁的情况进行模拟. 伸展规律取为三种形式: 1. 匀速伸展 $l=l_0+vt$; 2. 匀减速伸展 $l=l_0+v_0t-0.5at^2$, $a>0$; 3. 指数规律伸展 $l=l_0+(v_0/b)(1-e^{-bt})$, $b>0$. 图2为无外载荷时三种伸展规律下的姿态角和一阶广义模态坐标

的时间历程(初始条件 $\dot{q}_0=0$, $q_0=(0,0.1,0,0,\cdots 0]^T$), 图 3 为端点有幅度为 0.02$N$ 的随机干扰时的响应(初始条件 $q_0=0,\dot{q}_0=0$). 每种情况的初始长度均为 1m, 且伸展到 5m 长时停止伸展. 三种情况伸展完成的时间分别约为 200s、75s、100s.



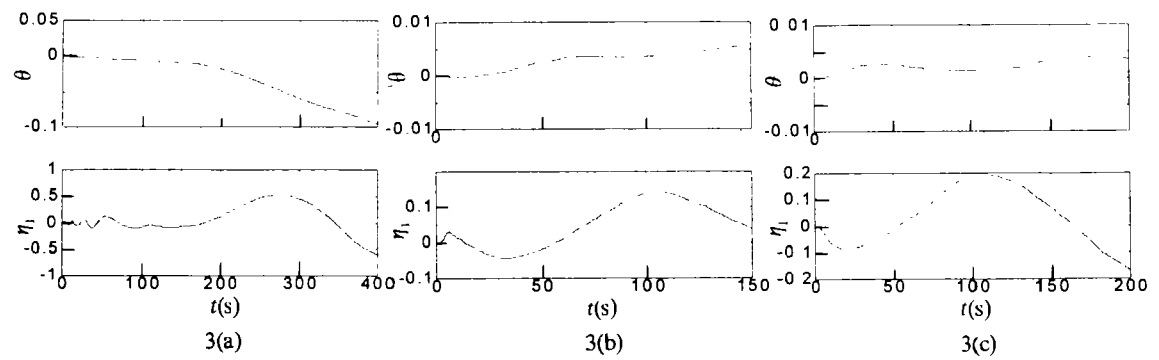
(a) $v=0.02$m /s, 匀速伸展(Deploy with Constant speed)

(b) $v_0=0.09$m /s, $a=0.001$m /s^2, 匀减速伸展(Deploy with constant acceleration)

(c) $v_0=0.2$m /s, $b=0.05$, 指数规律伸展 (Deploy with exponential law)

图 2　无外扰伸展

Fig. 2　Deploy without disturbance



(a) $v=0.02$m /s, 匀速伸展(Deploy with Constant speed)

(b) $v_0=0.09$m /s, $a=0.001$m /s^2, 匀减速伸展(Deploy with constant acceleration)

(c) $v_0=0.2$m /s, $b=0.05$, 指数规律伸展 (Deploy with exponential law)

图 3　随机干扰下的伸展

Fig. 3　Deploy in the case of random disturbance

三、结果与讨论

航天器的惯量随附件的伸展而变化, 从而对航天器的天平动产生影响. 由于本文所考虑的附件长度只有几米, 伸展时间相对轨道周期来说很短, 且引力梯度矩的量级很

小，因此我们这里忽略了轨道因素和引力梯度矩.

伸展完成以后航天器的姿态角和广义模态坐标均呈大幅振荡运动，且相位和振幅与伸展规律和初始条件有关(图 2). 伸展结束后的稳态振幅受达到规定伸展长度时的伸展速度影响，按指数规律伸展结束时，梁的伸展速度较小，因而梁的稳态弹性振动幅值也较小(图 2(c)). 在不同的伸展规律下干扰的作用也不一样，匀速伸展引起的姿态变化和弹性振动都比较大(图 3). 伸展过程中的振荡次数也明显地受伸展速度影响，匀速伸展的速度较小，频率变化较慢，因而振荡次数较多. 由以上结果可以初步确认，伸展速度平滑改变的伸展规律对系统的影响较小.

带柔性可伸展附件的航天器有着与一般时不变结构明显不同的动力学特性，伸展规律和初始条件对系统的瞬态过程及伸展完成以后的稳态响应均有影响. 伸展过程中系统的质量、阻尼、刚度矩阵都在改变，各阶振动频率也随着附件长度的增加而减小，因而产生了局部共振现象. 伸展规律的选择应该使得附件达到规定伸展长度时伸展速度接近于零，以使系统具有较小的稳态响应.

参 考 文 献

[1] Lips, K. W. and V. J. Modi, *Journal of Guidance Control Dynamics*, Vol, **4**, p. 650, 1981.

[2] Modi, V. J. and A. M. Ibrahim, *Journel of Guidance Control Dynamics*, Vol. **7**, p. 563, 1984.

[3] Ibrahim, A. E. and A. K. Misra, *Journal of Guidance Control Dynamics*, Vol. **5**, p. 442, 1982.

[4] Kalayeloglu, S. and A. K. Misra, *Journal of Guidance Control Dynamics*, Vol, **14**, p. 287, 1991.

[5] Krishna, R. and P. M. Bainum, *Acta Astronautica*, Vol. **12**, p. 871, 1985.

[6] Meirovitch, L, Computational Methods in Structrual Dynamics, Alphen ann den Rijn, p. 270, 1980.

DYNAMIC PROPERTY ANALYSIS FOR SPACECRAFT WITH BEAM－LIKE DEPLOYING APPENDAGES

Zhu Gui－dong Wang Beng－li Shao Cheng－xun

(*Department of Astronautics and Mechanics, Harbin Institute of Technology*, 150001)

Abstract

This paper studies the attitude dynamics and vibration of appendages of spacecraft with deploying appendages. A spacecraft model of a center rigid body with some deployable beams are considered. The governing equations are derived based on characteristic function of bending beam, and the effects of deploying rate and disturbance on system behavior are investigated to find the criteria of the selection of deploying rate. The numerical simulation results are also presented.

Key words Spacecraft dynamics, Deploying, Flexible appendages