

面向椭圆轨道的航天器混合最优姿态控制*

曹家璐 郎啸宇 刘向东 陈 振

(北京理工大学自动化学院 北京 100081)

摘 要 航天器在姿态控制过程中, 纯磁控在提供控制力矩时存在欠驱动和控制能力有限的问题. 本文提出在使用磁力矩器之外合理地加入脉冲推力器, 即混合使用连续和离散控制力矩完成航天器的姿态控制任务. 基于这种力矩施加方式, 设计一种面向椭圆轨道航天器的混合线性二次型 (Linear Quadratic Regulator, LQR) 姿态控制方法. 通过研究椭圆轨道上磁控能力随着椭圆轨道偏心率的变化趋势, 找出椭圆轨道上纯磁控制能力最低的时刻, 并在此时施加合适的脉冲, 使得系统需要的控制增益通过离散脉冲的加入得到一定的补偿. 仿真结果表明, 面向椭圆轨道航天器的混合线性二次型控制方法在姿态控制效果上具有良好表现.

关键词 最优混合控制, 椭圆轨道, 磁力矩器, 脉冲推力器, 航天器姿态控制

中图分类号 V11

Optimal Hybrid Attitude Control of Spacecraft in Elliptical Orbit

CAO Jialu LANG Xiaoyu LIU Xiangdong CHEN Zhen

(School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

Abstract During the spacecraft attitude control, pure magnetic control suffers from under actuation and limited torque authority, restricting its effectiveness, particularly in elliptical orbits where the magnetic field does not vary as regularly as it does in circular orbits. This paper explores the integration of an impulse thruster alongside a magnetic torque generator, employing a combination of continuous and discrete control moments to enhance attitude maneuverability and stability. By leveraging the complementary characteristics of both control methods, a more effective attitude control strategy can be achieved. Based on this hybrid torque application, a Linear Quadratic Regulator (LQR)-based attitude control strategy is developed for spacecraft operating in elliptical orbits. The proposed control framework dynamically determines the timing and magnitude of discrete impulses to compensate for the deficiencies of pure magnetic control. By analyzing the relationship between magnetic control effectiveness and variations in the eccentricity of elliptical orbit, we identify the point at which pure magnetic control exhibits its weakest capability. At this critical moment, an appropriately impulse is applied, compensating for the system's required control gain through discrete thrust pulses. This method ensures that the

* 国家自然科学基金项目 (62303057) 和中国科协青年人才托举工程项目 (2023QNRC001) 共同资助

2024-10-30 收到原稿, 2025-02-10 收到修定稿

spacecraft maintains the desired attitude control effects with improved accuracy and robustness. Furthermore, the proposed hybrid control approach is evaluated through numerical simulations under given orbital and disturbance conditions. Simulation results demonstrate that the proposed hybrid LQR control method significantly enhances attitude control performance compared to purely magnetic control strategies. The introduction of pulse thrusters effectively reduces the regulation time and improves the transient performance of the system. These findings highlight the effectiveness of the hybrid control approach in addressing the challenges of spacecraft attitude regulation in elliptical orbits and provide valuable insights into advanced control methodologies for spacecraft operating.

Key words Optimal hybrid LQR control, Elliptic orbit, Magnetic attitude control, Impulsive thrust, Spacecraft attitude control

0 引言

基于地球磁场与通电线圈之间的相互作用原理, 磁力矩器可为航天器姿态控制提供连续控制力矩, 因而作为一种简单高效的执行机构被广泛地应用于航天器姿态控制系统. 与此同时, 磁力矩器的工作原理使得磁性航天器的控制问题与传统的姿态调节问题有很大的不同^[1]: 当磁力矩器工作在时变的地磁场中, 输出的控制力矩由磁矩矢量与地磁场磁通密度叉乘得到, 造成磁力矩的方向被限制在垂直于地磁场矢量平面的方向上, 进而会引起姿态控制系统瞬时欠驱动的问题. 此外, 中高轨道位置上的地磁场强度较为微弱, 导致由磁力矩器产生的控制力矩存在一定的输出增益上限, 使得姿态动力系统的稳定过程较为缓慢, 在控制能力和控制效果上具有一定程度的局限性.

近年来, 随着航天技术的不断进步和发展, 空间任务对卫星姿态稳定与调节能力的要求也在不断提高^[2]. 对于仅依赖磁力控制存在的瞬时欠驱动问题, 文献 [3–6] 中提出通过在一段时间内取平均的周期性理论来解决, 主要利用最优和鲁棒周期控制理论为一些不同的姿态控制系统构型设计状态和输出反馈调节器. 面对磁力矩器的增益限制问题时, 为了保证系统的稳定性, 则可以采取使用其他执行机构的方法. 针对具有混合型执行机构的态度控制系统, 较早的研究出现在文献 [7] 中, 作者提出一种使用推进器和反作用飞轮的组合控制算法实现姿态机动. 随后, Hall 等在文献 [8] 中提出使用推力器进行 bang-bang 控制来提供精度较低的姿态机动, 通过动量轮实现精确的姿态调整. 此外, 磁力矩器也可用于配合其他类型的被动稳定方式进行姿态控制, 例如重力梯度稳

定^[9,10]、气动稳定^[11]等. 文献 [12] 讨论了一种同时利用磁力矩器和反作用飞轮的控制方案, 提出了一种基于欧拉轴瞬时旋转的算法, 使得机动过程中反作用飞轮的饱和和发生率得到有效降低. 文献 [13] 针对将磁力矩器和飞轮作为混合执行机构的态度控制系统, 提出了一种解耦的变结构控制算法, 有效地抑制了反作用飞轮的饱和问题, 并弥补了仅依赖磁力矩器导致系统姿态稳定所需时间较长的缺陷.

当使用脉冲推力器配合磁力矩器进行姿态控制时, 磁力矩器提供连续控制信号, 脉冲推力器提供离散控制信号, 因而会产生“连续+脉冲”的混合控制方法. 这种混合控制方法采用脉冲推力器来补偿磁力矩器在上述控制输出增益的缺失. 文献 [14] 提出了按照航天器的配置约束进行总控制力矩分配的设计, 通过加入脉冲推力器配合磁力矩器来提高系统控制性能. 文献 [15] 考虑了连续推力与洛伦兹力的组合, 以及脉冲推力的非最优组合. 在文献 [16] 中, 为了实现全状态问题可控, 针对脉冲推力和洛伦兹力驱动的联合使用, 提出了一种新型的连续/离散线性二次型调节器, 以最优的方式组合两种驱动方法, 通过合理选择加权矩阵, 使得推力需求与传统相比显著降低. 文献 [17] 在航天器所处轨道是圆轨道的情况下, 提出了一种对混合控制器的两个部分同时进行设计的控制方法, 针对磁力矩器控制权限的变化, 设计了一种基于系统能控性的脉冲施加方法.

考虑到实际航天器的运行轨道多为椭圆轨道, 且相比圆轨道固定的轨道高度, 椭圆轨道的不同轨道参数会使轨道上的地磁场强度发生变化, 进而会对磁力矩器的控制能力产生不同的影响. 本文将文献 [17] 中只适用于近地圆轨道的控制方法扩展到中高轨道高

度的椭圆轨道, 研究椭圆轨道上磁控能力的变化, 利用最优控制理论, 设计面向椭圆轨道的航天器混合姿态控制方法, 根据仿真试验分析椭圆偏心率对系统磁控能力的影响, 验证混合姿态控制方法在椭圆轨道上的可行性.

1 考虑混合执行机构的航天器姿态动力学建模

航天器旋转体采用欧拉刚体方程进行建模, 有

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\tau}_{\text{mag}} + \boldsymbol{\tau}_{\text{imp}} + \boldsymbol{\tau}_{\text{dist}}. \quad (1)$$

其中, $\boldsymbol{\omega}$ 代表航天器角速度矢量, $\mathbf{I}$ 代表其转动惯量矩阵, $\boldsymbol{\tau}_{\text{mag}}$ 是由磁力矩器产生的连续控制力矩, $\boldsymbol{\tau}_{\text{imp}}$ 是由脉冲推力器产生的离散控制力矩, $\boldsymbol{\tau}_{\text{dist}}$ 是外部扰动源产生的干扰力矩. $(\cdot)^\times$ 表示斜对称矩阵算子, 其作用如下:

$$\boldsymbol{\omega}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

假设在 $t_k, k \in \{1, 2, \dots, N\}$ 时由脉冲推力器施加脉冲, 且对于干扰力矩考虑重力梯度扰动、剩磁干扰、光压干扰、气动干扰, 由此各力矩可具体表示为

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{mag}} = \mathbf{m}^\times \mathbf{b}_B, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{imp}} = \sum_{k=1}^N \mathbf{n}_k \delta(t - t_k), \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{gg}} = \frac{3\mu}{|\mathbf{r}_B|^5} \mathbf{r}_B^\times \mathbf{I} \mathbf{r}_B, \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{md}} = \mathbf{m}_{\text{dist}}^\times \mathbf{b}_B. \quad (6)$$

其中, $\boldsymbol{\tau}_{\text{gg}}$ 表示重力梯度干扰, $\boldsymbol{\tau}_{\text{md}}$ 表示剩磁干扰, $\mu = 3.9859 \times 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ 代表地球引力常数, $\mathbf{n}_k$ 表示脉冲推力器在 t_k 时输出的力矩, $\delta(\cdot)$ 表示狄拉克函数. 对于在体坐标系下表示的磁场矢量 $\mathbf{b}_B$ 和位置矢量 $\mathbf{r}_B$, 均可通过旋转矩阵由其在心地惯性坐标系下表示的对应矢量转化得到, 即 $\mathbf{b}_B = \mathbf{C}_{BG} \mathbf{b}_G, \mathbf{r}_B = \mathbf{C}_{BG} \mathbf{r}_G$, 其中 $\mathbf{C}_{BG}$ 表示从心地惯性坐标系到体坐标系的旋转矩阵. 航天器运行期间的位置矢量 $\mathbf{r}_G$ 与时变地磁场 $\mathbf{b}_G$ 通过国际地磁参考场 (International Geomagnetic Reference Field, IGRF) 获取. 光压干扰力矩可表示为^[18]

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{srp}} = (\mathbf{r}_{sO} - \mathbf{r}_{CO}) \times A_s \mathbf{P}_s = \mathbf{r}_{Cs} \times \mathbf{F}_{\text{srp}}. \quad (7)$$

其中, $\mathbf{r}_{sO}$ 表示参考点 O 到光压作用点 s 的向量, $\mathbf{r}_{CO}$ 表示参考点 O 到航天器质心 C 的向量, $\mathbf{r}_{Cs}$ 表示航天器质心 C 到光压作用点 s 的向量; A_s 表示航天器暴露在太阳下的投影横截面积, $\mathbf{F}_{\text{srp}}$ 表示航天器受到的太阳光压, $\mathbf{F}_{\text{srp}} = -A_s P_{\text{solar}} (1 + q_{\text{ref}}) \cdot \hat{\mathbf{n}}, P_{\text{solar}} = 4.56 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ 表示单位面积的太阳光压, $q_{\text{ref}} = 1.2$ 表示卫星表面材料的反射系数, $\hat{\mathbf{n}}$ 表示反射表面法向量的单位向量. 气动干扰力矩可表示为

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{drag}} = \mathbf{r}_{Cp} \times \mathbf{F}_{\text{drag}}. \quad (8)$$

其中, $\mathbf{r}_{Cp}$ 表示航天器质心 C 到气动作用力点 p 的向量; $\mathbf{F}_{\text{drag}}$ 表示航天器所受到的气动阻力, $\mathbf{F}_{\text{drag}} = -\frac{1}{2} C_d \rho_{\text{atmos}} A_d v_{\text{rel}}^2 \hat{\mathbf{v}}; C_d = 2.2$, 表示航天器阻力系数; ρ_{atmos} 表示当前位置大气密度; A_d 表示航天器迎风横截面积; v_{rel} 表示航天器相对于大气的相对速度, $\hat{\mathbf{v}}$ 表示航天器相对速度方向的单位向量.

航天器姿态由其四元数描述 $\{\epsilon, \eta\}$, 其中 $\epsilon = [\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3]^T$ 且 $\epsilon^T \epsilon + \eta^2 = 1$. 基于四元数可以计算航天器任意运行时刻的旋转矩阵为

$$\mathbf{C}_{BG} = (\eta^2 - \epsilon^T \epsilon) \times \mathbf{1}_{3 \times 3} + 2\epsilon \epsilon^T - 2\eta \epsilon^\times. \quad (9)$$

基于四元数的航天器运动学方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \eta \times \mathbf{1}_{3 \times 3} + \epsilon^\times \\ -\epsilon^T \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}. \quad (10)$$

2 椭圆轨道航天器混合最优控制

2.1 模型线性化

在设计进行混合最优控制方法之前, 首先对航天器动力学模型进行线性化. 在小角度假设 $\dot{\boldsymbol{\theta}} \approx \boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\theta} \approx 2\epsilon$ 的条件下, 综合式 (1) 和式 (9), 得到混合系统状态空间方程^[18], 其中当 $t \neq t_k$ 时, 得到连续系统状态空间方程为

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}(t)} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{1}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_c} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -\mathbf{I}^{-1} \mathbf{b}_G^\times(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_c(t)} \underbrace{[\mathbf{m}(t)]}_{\mathbf{u}(t)}. \quad (11)$$

当 $t = t_k$ 时, 得到离散系统状态空间方程为

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \theta(t_k^+) \\ \dot{\theta}(t_k^+) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t_k^+)} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{1}_{3 \times 3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_d} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta(t_k^-) \\ \dot{\theta}(t_k^-) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t_k^-)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_d} \underbrace{\begin{bmatrix} n_k \\ v_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_k}. \quad (12)$$

其中, 向量 $\mathbf{x}(t)$ 为系统状态, $\mathbf{u}(t)$ 表示连续磁力矩输入量, $\mathbf{v}_k$ 表示离散脉冲推力输入量, 共有 N 个离散脉冲施加在时刻 $t_k, k \in \{1, 2, \dots, N\}$ 上, 而 t_k^- 和 t_k^+ 分别表示脉冲施加的前后时刻.

2.2 磁控能力分析与脉冲时刻的选择

混合姿态控制方法通过在磁力矩器最不能够控制系统时施加脉冲, 以弥补在这些时刻磁力矩器控制权限的不足. 为了评估磁力矩器对系统的控制能力, 选择脉冲施加时刻 $t_k, k \in \{1, 2, \dots, N\}$, 计算连续系统在总运行时间内每个跨越宽度为 Δt 的微小时间间隔上的可控性格拉姆 (Gramian) 矩阵, 评估其逐点可控性^[17]:

$$\mathbf{W}_j = \int_{\bar{t}_j}^{\bar{t}_j + \Delta t} e^{[(\bar{t}_j + \Delta t) - \tau] \mathbf{A}_c} \mathbf{B}_c(\tau) \mathbf{B}_c^T(\tau) \times e^{[(\bar{t}_j + \Delta t) - \tau] \mathbf{A}_c^T} d\tau. \quad (13)$$

其中, $\mathbf{W}_j$ 表示从 $\bar{t}_j$ 开始的第 j 个宽度为 Δt 的小时间间隔上的可控性 Gramian 矩阵, $\mathbf{A}_c$ 和 $\mathbf{B}_c(t)$ 为式 (11) 中的矩阵.

通过遍历整个轨道周期, 在周期内每个宽度为 Δt 的微小时间间隔上计算其可控性 Gramian 矩阵来评估此时磁力矩器的瞬态控制能力. 随后, 计算每个小时间间隔 Δt 上 Gramian 矩阵的最小特征值, 并求出在每个轨道周期上最小特征值达到局部极小值的时刻, 即磁力矩器控制能力最弱的时刻, 在此时使用脉冲推力器施加脉冲控制信号用以补偿磁控在此时控制能力的不足, 从而改善航天器系统的姿态控制性能.

2.3 混合线性二次型控制器设计

对于混合使用磁力矩器和脉冲推力器的航天器姿态控制系统, 考虑其混合性能指标^[19], 有

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{x}(t_f) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k^+}^{t_{k+1}^-} \left[\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}_c \mathbf{u}(t) \right] dt + \\ & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \left[\mathbf{x}^T(t_k^-) \mathbf{Q}_d \mathbf{x}(t_k^-) + \mathbf{v}_k^T \mathbf{R}_d \mathbf{v}_k \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

其中, t_f 表示终止时间, $t_0^+ \triangleq t_0$ 且 $t_N^- \triangleq t_f$. $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T \geq 0$ 设置了末端状态, $\mathbf{Q}_c = \mathbf{Q}_c^T \geq 0$ 和 $\mathbf{R}_c = \mathbf{R}_c^T$ 是连续状态和控制的权重矩阵, $\mathbf{Q}_d = \mathbf{Q}_d^T \geq 0$ 和 $\mathbf{R}_d = \mathbf{R}_d^T$ 是离散状态和控制的权重矩阵.

分别构造连续和离散系统的哈密顿函数, 有^[19]

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c(t) \triangleq & \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_c \mathbf{x}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}_c \mathbf{u}(t) + \\ & \lambda^T(t) [\mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c(t) \mathbf{u}(t) + \mathbf{d}(t)], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_d(t_k) \triangleq & \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_k^-) \mathbf{Q}_d \mathbf{x}(t_k^-) + \frac{1}{2} \mathbf{v}_k^T \mathbf{R}_d \mathbf{v}_k + \\ & \mathbf{v}_k^T [\mathbf{A}_d \mathbf{x}(t_k^-) + \mathbf{B}_d \mathbf{v}_k]. \end{aligned} \quad (16)$$

将连续和离散哈密顿函数代入系统混合性能指标中, 基于最优控制理论, 使用变分法可以得到连续和离散时间黎卡提 (Riccati) 方程如下:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}(t) = & -\mathbf{P}(t) \mathbf{A}_c - \mathbf{A}_c^T \mathbf{P}(t) - \mathbf{Q}_c + \\ & \mathbf{P}(t) \mathbf{B}_c(t) \mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{B}_c^T(t) \mathbf{P}(t), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{S}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t_k^-) = & \mathbf{P}(t_k^+) - \mathbf{P}(t_k^+) \mathbf{B}_d [\mathbf{R}_d + \mathbf{B}_d^T \mathbf{P}(t_k^+) \mathbf{B}_d]^{-1} \cdot \\ & \mathbf{B}_d^T \mathbf{P}(t_k^+) + \mathbf{Q}_d. \end{aligned} \quad (19)$$

随后, 从末端时刻 t_f 开始, 以 $\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{S}$ 为终值条件, 在连续区间 $[t_k^+, t_{k+1}^-]$ 上对连续 Riccati 方程式 (17) 在时间段内向前积分, 直至达到脉冲时刻 t_k , 使用离散时间 Riccati 方程式 (19) 完成从 $\mathbf{P}(t_k^+)$ 到 $\mathbf{P}(t_k^-)$ 的跳变, 然后以新的值 $\mathbf{P}(t_k^-)$ 作为下一个连续积分区间的终值条件开始新一轮的积分, 一直重复这个过程直至达到初始时刻 $t_0 = 0$, 这样就得到了航天器在整个运行期间内的 Riccati 方程的解. 因此, 在对式 (1) 中的非线性航天器动力学方程求解时使用的是 Riccati 方程的解 $\mathbf{P}(t)$ 以及其脉冲前的值, 利用式 (20) 和 (21) 可以使得磁力矩器和脉冲推力器产生最优的混合控制力矩组合, 即最优连续和离散控制律^[17]为

$$\mathbf{u}^{\text{opt}}(t) = -\mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{B}_c^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t), \quad t \neq t_k; \quad (20)$$

$$\mathbf{v}_k^{\text{opt}} = -\mathbf{R}_d^{-1} \mathbf{B}_d^T \mathbf{A}_d^{-T} [\mathbf{P}(t_k^-) - \mathbf{Q}_d] \mathbf{x}(t_k^-), \quad t = t_k. \quad (21)$$

3 椭圆轨道磁控能力及混合控制结果评估

航天器参数选择如下: 转动惯量 $\mathbf{I} = \text{diag}\{27, 17, 25\} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$, 航天器星上剩余磁偶极矩 $\mathbf{m}_{\text{dist}} = [0.01 \ 0.01 \ 0.01]^T \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$. 假设航天器运行在一个开普勒轨道上, 轨道参数列于表 1, 轨道半长轴、偏心率的具体取值详见各小节说明.

在混合线性二次型调节器的设计中用于计算混合性能指标而使用到的权重矩阵取为常数. 其中, 连续状态权重矩阵 $\mathbf{Q}_c = \text{blockdiag}\{q_c \cdot \mathbf{1}_{3 \times 3}, q_c \cdot \mathbf{I}\}$ 和连续控制权重矩阵 $\mathbf{R}_c = r_c \cdot \mathbf{1}_{3 \times 3}$ 之间的比值关系 (离散状态权重矩阵 $\mathbf{Q}_d = \text{blockdiag}\{q_d \cdot \mathbf{1}_{3 \times 3}, q_d \cdot \mathbf{I}\}$ 和离散控制权重矩阵 $\mathbf{R}_d = r_d \cdot \mathbf{1}_{3 \times 3}$ 同理) 决定了控制优化过程中系统状态和控制增益对性能指标的影响, 其中 $\text{blockdiag}\{\cdot\}$ 表示分块对角矩阵. 假设状态权重矩阵 $\mathbf{Q}_d = \mathbf{0}_{6 \times 6}$, 而控制权重矩阵 $\mathbf{R}_d$ 取得极大值, 使得此时离散状态不受任何限制而脉冲推力器的任何增益输出均受到严重限制, 此时混合控制器将变为纯磁控控制器. 选取连续权重矩阵参数 $r_c = 3 \times 10^5$, $q_c = 1 \times 10^8$, 离散权重矩阵参数 $r_d = 1 \times 10^{15}$, $q_d = 1 \times 10^{13}$, 终端权重值设置为 $\mathbf{S} = \mathbf{P}(t_f) = \mathbf{0}_{6 \times 6}$.

3.1 磁控能力评估

首先对椭圆轨道参数变化对磁控能力的影响进行评估. 选取一个椭圆轨道, 为了探究椭圆偏心率对一个周期上磁控能力最低点出现时刻的影响, 选取椭圆偏心率变化范围为 $e \in [0, 0.6]$, 变化步长为 0.01, 固定近地点高度为 1350 km, 初始轨道参数见表 1. 按照式 (13) 给出的方程计算出每个小时时间间隔上的 Gramian 矩阵及其最小特征值. 随后寻找在一个完整的轨道周期上, 系统能控性矩阵最小特征值的局部极小值, 记录此时间点. 当在每个轨道周期内求取两个局部极小值时, 按照给定步长遍历 $e \in [0, 0.6]$ 之间所

有取值点之后, 得到磁控能力最低点出现时刻与椭圆轨道偏心率变化的关系, 如图 1 所示. 观察图 1 可以发现, 随着椭圆轨道偏心率的增大, 磁控权限最低点在每个轨道周期中出现的时刻差值逐步减小而后趋于稳定.

进一步分析可知, 当轨道偏心率为 0 时, 即运行轨道为圆轨道时, 在一个轨道周期上能控性 Gramian 矩阵最小特征值出现局部极小值的时间差为 $0.5 T$. 结合航天器在圆轨道上的实际运行情况分析, 局部极小值的出现意味着航天器在此时运行至接近地球南北极的位置, 故而航天器在运行周期上经过这两点产生的时间差为半个轨道周期, 即 $0.5 T$. 而随着偏心率的增大, 轨道半长轴增大, 椭圆轨道靠近地球南北极的两点不再能平分整个轨道一周的长度, 因此航天器从地球的一极沿靠近地球的一侧运行到地球的另一极所需要的时间不再是整个轨道周期的一半. 以轨道上处于地球南北极上方的两点将整个椭圆轨道周长分为长、短两个部分, 靠近地球的一侧轨道长度较短, 远离地球的一侧长度较长. 与此同时, 航天器在椭圆轨道上运行到达南北极上空的两个时刻也将每个在轨运行周期划分成长、短两个部分, 同理沿靠近地球一侧的运行时间较短, 远离地球的一侧用时较长. 选取其中用时较短的部分作为上述计算中的局部极小值时间差, 可以发现, 局部极小值间隔的时间段占整个轨道周期的比例随着偏心率增大而减小, 当偏心率增大到一定程度, 这一段的轨道长度占整个轨道周长的比例不再发生显著变化, 两个局部极小值出现

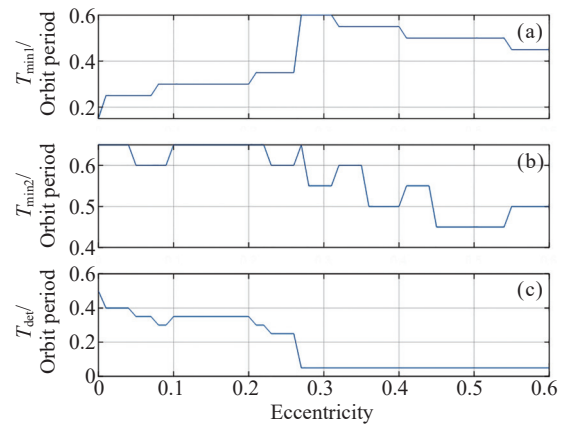


图 1 椭圆轨道磁控权限最低点随偏心率变化曲线

Fig. 1 Curves of the lowest point of magnetic control authority of elliptical orbit changing with eccentricity

表 1 航天器椭圆轨道参数
Table 1 Spacecraft elliptical orbit parameters

参数	数值
轨道倾角/(°)	87
近地点角距/rad	0
升交点赤经/rad	0
真近点角/(°)	0

的时间差也逐渐趋于定值。

3.2 磁控权限变化

在椭圆轨道磁控权限变化的研究及后续磁控力矩仿真中使用的地磁模型基于国际地磁参考场 (International Geomagnetic Reference Field, IGRF). IGRF 采用球谐函数的展开形式表征地球主磁场的分布, 其计算地磁场的过程可以描述如下: 输入当前所在经纬高位置参数, 通过坐标系转换, 将参数转换到球面地心坐标系, 获取所需时刻的高斯球谐系数, 在经过球谐系数的线性插值计算得到修正后的球谐系数后, 与球面地心坐标系的坐标共同使用求出地磁参考模型磁场分量, 最后再进行一次坐标转换, 得到大地坐标系下的地球磁场. 航天器运行各时刻对应的地心惯性坐标系下地磁场矢量 $\mathbf{b}_G$, 可以通过一系列的坐标变换获得.

选取椭圆轨道参数如表 1 所示, 固定近地点高度为 1350 km, 椭圆轨道偏心率为 0.1, 椭圆半长轴约为 8587 km. 根据航天器动力学和运动学方程, 建立起系统的仿真模型. 对于混合线性二次型方法的控制结果仿真实现, 首先需要计算连续系统的总运行时间上跨度为 Δt 的小时间间隔上的可控性 Gramian 矩阵, 然后确定其最小特征值在每个轨道周期上出现局部极小值的时刻, 将这些时刻作为脉冲施加的时刻. 对航天器在两个轨道周期上的可控性 Gramian 矩阵进行计算.

图 2 表征了给定航天器在指定参数和椭圆轨道

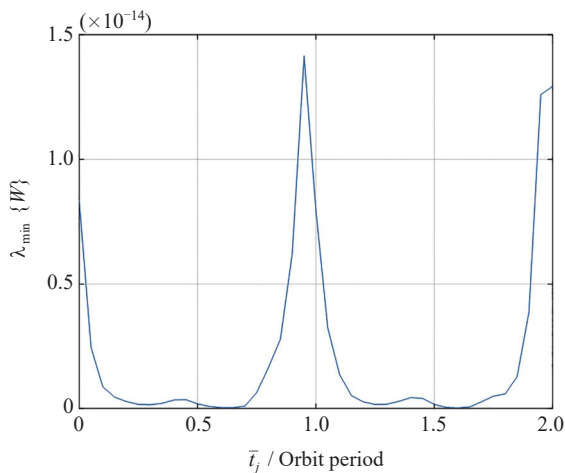


图 2 椭圆轨道磁控权限变化曲线

Fig. 2 Elliptic magnetic control permission change curve

上运行时, 能控性 Gramian 矩阵最小特征值在两个轨道周期上的演化. 注意到, 在第一个轨道周期内, 由 $\bar{t}_j = 0.3 T$ 和 $\bar{t}_j = 0.65 T$ 开始的小时间窗口内的能控性 Gramian 矩阵最小特征值是整个周期内的两个局部极小点, 说明此时磁的控制权限缺失最为显著. 与此同时, 可以观察到在第二个轨道周期, 磁控权限的变化重复了前一个周期的趋势, 这说明若将脉冲施加时刻固定选在每个周期的相同位置, 可以在整个运行时间上对磁控起到补充控制的作用, 使得航天器姿态控制效果得到一定改善. 因此, 本算例在每个周期内的 $0.3 T$ 和 $0.65 T$ 处施加脉冲.

3.3 混合最优算法结果

在 3.2 节中给出的椭圆轨道条件下, 航天器为形状近似为长方体的小质量卫星, 其长宽高取为 $[L, W, H] = [1, 0.5, 0.3] \text{ m}$, 取航天器暴露在太阳下的投影横截面积取 $A_s = L \cdot W = 0.5 \text{ m}^2$, 航天器质心 C 到光压作用点 s 的向量 $\mathbf{r}_{Cs} = [0.1, 0, 0.05] \text{ m}$, 由于轨道倾角较大, 反射表面法向量单位向量平均取为 $\hat{\mathbf{n}} = [0, 1, 0]$; 航天器迎风横截面积 $A_d = W \cdot H = 0.15 \text{ m}^2$, 航天器质心 C 到气动作用力点 p 的向量 $\mathbf{r}_{Cp} = [0.05, 0.05, 0] \text{ m}$. 由于此高度上大气稀薄, 航天器相对于大气的相对速度 v_{rel} 近似为航天器轨道速度, 可根据航天器在椭圆轨道上近地点和远地点速度取平均来近似, 航天器相对速度方向的单位向量 $\hat{\mathbf{v}} = [-1, 0, 0]$.

根据式 (20) 和式 (21) 设计控制律, 并将其代入到航天器非线性姿态动力学系统中, 对混合姿态控制系统进行仿真, 同时进行对比实验, 采用类似仅连续 LQR 方法 (即不施加脉冲) 设计了单独的纯磁 LQR 控制器, 为了保证对比实验的可信度, 在纯磁 LQR 控制器的设计中采用与混合控制器相同的连续惩罚矩阵.

图 3 和 4 给出了航天器在椭圆轨道上运行三个周期内的四元数矢量部分和角速度的仿真结果, 比较了所提出的混合 LQR 控制器和纯磁 LQR 控制器的性能, 分别展示了混合执行机构和单独磁力矩器将航天器姿态从初始条件收敛到平衡态时的控制过程. 结果表明, 利用这种权重矩阵的选择以及脉冲施加时刻的选取, 结合混合 LQR 控制器可以使得运行在椭圆轨道上的航天器姿态四元数和角速度从初始状态趋

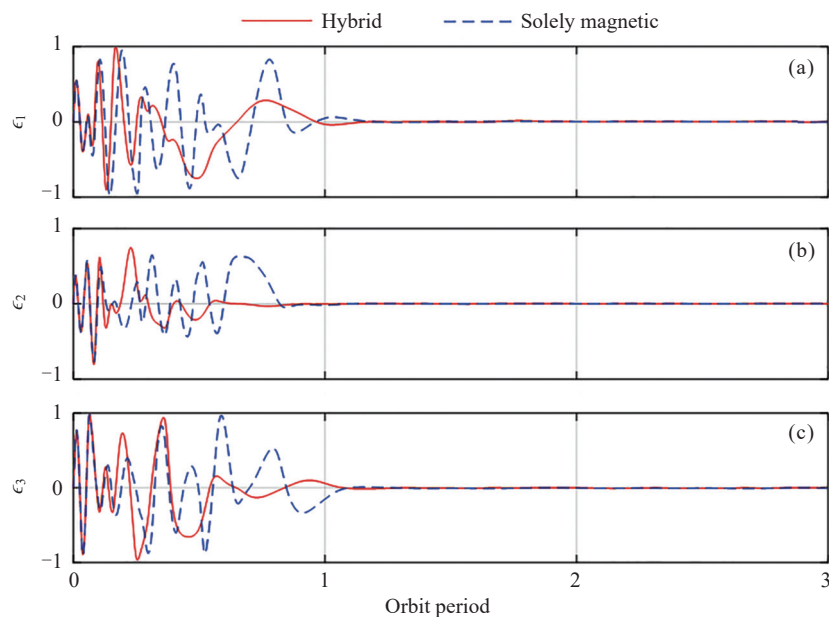


图 3 四元数矢量变化曲线

Fig. 3 Quaternion vector change curve

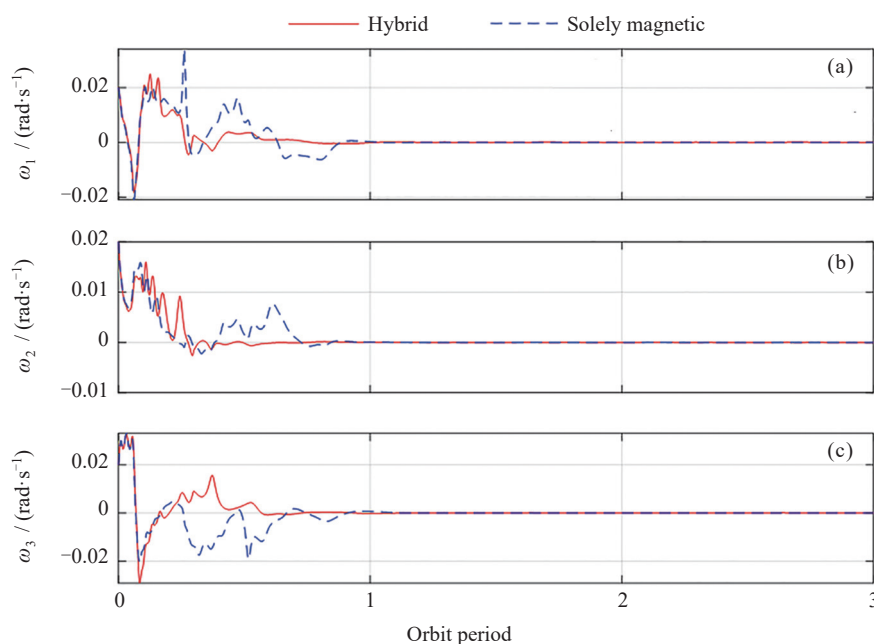


图 4 航天器角速度变化曲线

Fig. 4 Angular velocity curve of spacecraft

向稳定平衡状态, 而且在调节时间和系统瞬态性能方面相较于传统单一磁控 LQR 控制器取得了显著提升. 在对系统状态方程进行解算的同时也可以获得在三个方向上连续和离散控制力矩的变化曲线, 分别如图 5 和 6 所示, 表明通过额外增加脉冲推力可使得磁控工作量在后几个轨道周期上大幅减少.

4 结语

采用磁力矩器和脉冲推力器共同作为航天器执行机构能够克服单一执行机构对姿态控制系统带来的限制和问题. 本文从纯磁航天器姿态控制系统的缺点入手, 着重研究了在椭圆轨道上纯磁控制权限的变

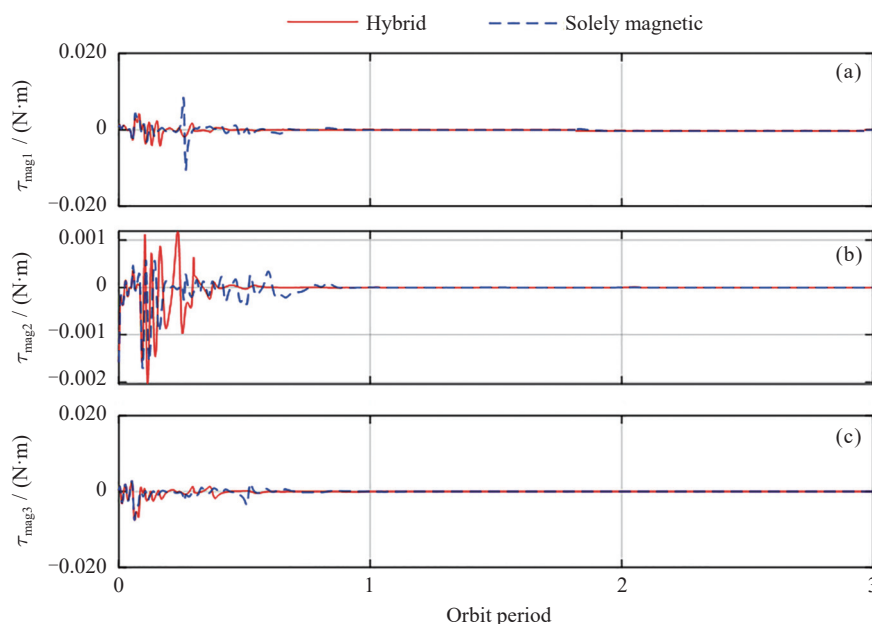


图5 连续磁力矩变化曲线

Fig. 5 Continuous magnetic moment variation curve

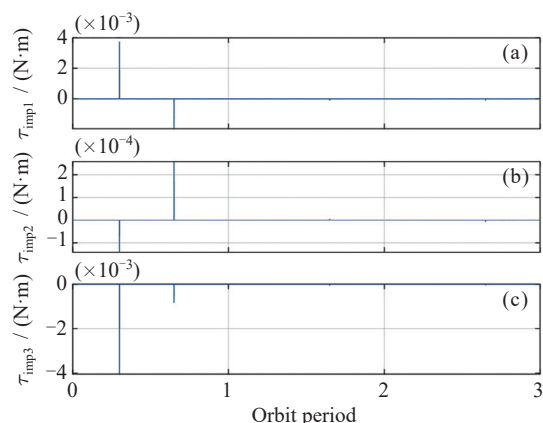


图6 脉冲力矩变化曲线

Fig. 6 Impulse moment variation curve

化特点, 探究了椭圆轨道上磁控能力最小时的时刻出现的规律, 随后提出面向椭圆轨道航天器的混合姿态控制方法, 并进行了仿真验证. 仿真结果表明, 面向椭圆轨道的混合姿态控制方法能够实现对航天器姿态得稳定控制.

参考文献

- [1] LOVERA M, ASTOLFI A. Global magnetic attitude control of spacecraft in the presence of gravity gradient[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2006, **42**(3): 796-805
- [2] ZHANG Liu, WANG Shaoju, JIN Guang. Design of three-axis stable robust adaptive attitude control of microsatellites[J]. *Chinese Journal of Space Science*, 2009, **29**(1): 29-33 (张刘, 王绍举, 金光. 小卫星三轴稳定鲁棒自适应控制器设计[J]. *空间科学学报*, 2009, **29**(1): 29-33)
- [3] WISNIEWSKI R. Linear time-varying approach to satellite attitude control using only electromagnetic actuation[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2000, **23**(4): 640-647
- [4] LOVERA M, ASTOLFI A. Spacecraft attitude control using magnetic actuators[J]. *Automatica*, 2004, **40**(8): 1405-1414
- [5] SILANI E, LOVERA M. Magnetic spacecraft attitude control: a survey and some new results[J]. *Control Engineering Practice*, 2005, **13**(3): 357-371
- [6] ZHOU B. Global stabilization of periodic linear systems by bounded controls with applications to spacecraft magnetic attitude control[J]. *Automatica*, 2015, **60**: 145-154
- [7] CHEN X J, STEYN W. Robust combined eigenaxis slew manoeuvre[C]//Proceedings of 1999 Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit. Portland: AIAA, 1999: 521-529
- [8] HALL C D, TSIOTRAS P, SHEN H J. Tracking rigid body motion using thrusters and momentum wheels[J]. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 2002, **50**(3): 311-323
- [9] WISNIEWSKI R, MARKLEY F L. Optimal magnetic attitude control[J]. *IFAC Proceedings Volumes*, 1999, **32**(2): 7991-7996
- [10] PSIAKI M L. Magnetic torquer attitude control via asymptotic periodic linear quadratic regulation[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2001, **24**(2): 386-394

- [11] WOOD M, CHEN W H, FERTIN D. Model predictive control of low earth orbiting spacecraft with magnetorquers[C]//Proceedings of 2006 IEEE Conference on Computer Aided Control System Design, 2006 IEEE International Conference on Control Applications, 2006 IEEE International Symposium on Intelligent Control. Munich: IEEE, 2006: 2908-2913
- [12] SUN Zhaowei, LIN Xiaohui, CAO Xibin. Combined control algorithm for large angle maneuver of small satellite[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2003, **35**(6): 663-667,670 (孙兆伟, 林晓辉, 曹喜滨. 小卫星姿态大角度机动联合控制算法 [J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2003, **35**(6): 663-667,670)
- [13] SUN Zhaowei, YANG Xu, YANG Di. The combined control algorithm for magnetorquer and reaction wheel of small satellite[J]. *Control Theory & Applications*, 2002, **19**(2): 173-177 (孙兆伟, 杨旭, 杨涤. 小卫星磁力矩器与反作用飞轮联合控制算法研究 [J]. *控制理论与应用*, 2002, **19**(2): 173-177)
- [14] PULECCHI T, LOVERA M. Attitude control of spacecraft with partially magnetic actuation[J]. *IFAC Proceedings Volumes*, 2007, **40**(7): 609-614
- [15] SOBIESIAK L, DAMAREN C. Hybrid periodic differential element control using the geomagnetic Lorentz force[C]//Proceedings of AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference. Minneapolis: AIAA, 2012: 4584
- [16] SOBIESIAK L A, DAMAREN C J. Optimal continuous/impulsive control for Lorentz-augmented spacecraft formations[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2015, **38**(1): 151-157
- [17] VATANKHAHGHADIM B, DAMAREN C J. Optimal combination of magnetic attitude control with impulsive thrusting[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2016, **39**(10): 2391-2398
- [18] PETERSEN C D, LEVE F, FLYNN M, *et al.* Recovering linear controllability of an underactuated spacecraft by exploiting solar radiation pressure[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2016, **39**(4): 826-837
- [19] VATANKHAHGHADIM B, DAMAREN C J. Optimal hybrid magnetic attitude control: disturbance accommodation and impulse timing[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2017, **25**(4): 1512-1520

作者简介



曹家璐 女, 2001年9月出生于陕西西安, 现为北京理工大学自动化学院硕士研究生, 主要研究方向为博弈论、航天器姿态控制等。

E-mail: caojialu3653@163.com



郎啸宇 男, 1992年4月出生于内蒙古呼和浩特, 现为北京理工大学自动化学院助理教授/特别副研究员, 硕士生导师, 主要研究方向为航天器动力学与控制、空间挠性结构分布式控制等。

E-mail: xylang@bit.edu.cn