第7期 第4期 空间科学学报 Vol. 7, No. 4
1987年10月 GHINESE JOURNAL OF SPACE SCIENCE Oct., 1987

磁层顶的 Kelvin-Helmholtz 不稳定性 (III) 可压缩不稳定波的能量和动量输运

濮祖荫
(北京大学地球物理系)

M. G. Kivelson
(洛杉矶加州大学地球和空间科学系)

摘 要

本文在假定磁层顶为切向间断面的近似下分析了可压缩 K-H 不稳定波在磁层顶两侧的能量分配及能量和动量输运,讨论了相应的物理机制. 计算表明, K-H 不稳定性确实能在太阳风-磁层耦合中起重要作用.

一、引 言

现在普遍认为,磁层顶的 Kelvin-Helmholtz 不稳定性是激发磁层脉动和加强磁层对流的重要机制. 为什么它能在太阳风-磁层耦合中起这种作用呢? 磁流体动力学(MHD)数值模拟[3,4]表明,在速度剪切层中,不稳定性产生以后, K-H 波将能量和动量由速度高的区域传向静止流体. 但对磁层顶和低纬边界层来说,由于存在间断面(间断面内 MHD 方程不成立), 上述结果不适用. 在此之前本文作者已经指出[1,2,5], 在地球磁层顶两侧等离子体是可压缩的,而可压缩 K-H 不稳定波在磁层顶的法线方向也是传播波. 计算表明[2,5],在磁层一侧, K-H 波能流密度的法向分量由磁层顶指向磁层.

前文[1,2]讨论 K-H 波的能量及其输运时在磁层和磁鞘两侧分别用了相对各自等离子体静止的参考系. 在这种情况下法向能流由磁层顶指向两侧. 然而,众所周知,能量和能流都是和参考系有关的. 研究能量和动量输运最好统一地采用磁层参考系. 本文的目的就是要在这个参考系中进一步讨论磁层两侧的能量密度、能流密度向量和动量流密度张量,以求对 K-H 波的能量和动量输运过程有更为深入的理解. 文中所用的模型与参数与文献 [1, 2] 相同,即假设磁层顶为切向间断面,位于 $Z = 0$ 平面. 磁层和磁鞘位于两侧(以 1 和 2 表示)半无穷空间,浓度(N)、压强(P)和磁场 ($\boldsymbol{B}$) 各自均匀. 磁鞘流 $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{U} v_{A1}$, v_{A1} 为磁层 Alfven 速率. 模型 1 ($\boldsymbol{B}_1 \perp \boldsymbol{k}_t // \boldsymbol{B}_1 // \boldsymbol{U}$) 近似代表低纬向阳面,模型 2

本文于 1987 年 3 月 5 日收到.

($\boldsymbol{B}_1 /\!/ \boldsymbol{B}_2 /\!/ \boldsymbol{U} /\!/ \boldsymbol{k}_t$)近似代表高纬(或磁尾). 应该指出,由于边界层的存在,场和等离子体结构远比上述"两层模式"复杂. 但实际观测到的 K-H 波,波长显著大于向阳面边界层厚度.此时边界层的存在并未使问题根本改观.因此作为第一步,本文仅探讨磁层顶两侧 K-H 波的能量和动量输运,且仅讨论线性近似. 进一步的工作将在另文中论述. 基本方程和色散关系均与文献 [1, 2] 相同,此处从略.

二、能 量 密 度

在 MHD 近似下介质的能量密度[6]

$$E = \rho v^2/2 + B^2/2\mu_0 + \rho\varepsilon$$

ε 为内能. 波的能量密度为扰动动能、磁能、内能密度之和

$$\langle \delta E_W \rangle = \langle \delta E_K \rangle + \langle \delta E_B \rangle + \langle \delta E_I \rangle, \tag{1}$$

因磁鞘流满足非相对论近似,密度 ρ 和 $\boldsymbol{B}$ 与参考系无关,故

$$\langle \delta E_K \rangle = \langle \delta E_{K0} \rangle + \langle \delta E'_K \rangle, \tag{2}$$

这里

$$\langle \delta E_{K0} \rangle = \rho \langle \delta \boldsymbol{v} \cdot \delta \boldsymbol{v}^* \rangle / 4, \tag{3}$$

$$\langle \delta E'_K \rangle = \langle \delta\rho(\delta \boldsymbol{v}^* \cdot \boldsymbol{v}_0) + \delta\rho^*(\delta \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_0) \rangle / 2. \tag{4}$$

因而

$$\langle \delta E_W \rangle = (C_{K0}^2 + C_K'^2 + C_B^2 + C_I^2) |\delta\rho|^2 e^{2\omega_i t}/4\rho, \tag{5}$$

其中

$$C_K'^2 = \left(\frac{v_0 w_0}{1+\tau^2}\right)\left(\frac{w_0^2 \sin^2\theta}{w_0^2 - v_A^2\cos^2\theta}\right)^* + cc$$

$$+ \left(\frac{w_0^2\cos^2\theta}{1+\tau^2}\right)\left(\frac{v_0 w_0}{w_0^2 - v_A^2\cos^2\theta}\right)^* + cc, \tag{6}$$

$$\tau^2 = k_Z^2/k_t^2 = -1 + \frac{w_0^2}{w_0^2(v_A^2 + v_s^2) - v_A^2 v_s^2 \cos^2\theta}. \tag{7}$$

w_0 为静止参考系中波的切向相速度,θ 为 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{k}_t$ 间的夹角,v_s 为声速,$*$ 代表取共轭,cc 为前式复共轭. C_{K0}^2、C_B^2 和 C_I^2 的意义见[2]. 选取与 [1, 2] 相同的参数所得的计算结果见图 1(a). 图中 $F_\perp$、$F_{/\!/}$ 和 $S_{/\!/}$ 分别代表模型 1、2 快波和模型 2 慢波. U_c 和 U_m 表示下和上临界速度. 由图知,在低纬向阳面,$\langle \delta E_B \rangle_2 / \langle \delta E_B \rangle_1 > 1$. 故应有 $|\delta B_2| > |\delta B_1|$,这与观测结论定性相符[7]. 这一结果可以这样理解. 由冻结方程知,

$$\delta B_1 = (\delta B_{/\!/})_1 = -(\Delta \cdot \delta \boldsymbol{v}_1) B_1/\omega_1 = \tau_1 \delta\xi_1 k_t B_1.$$

$$|\delta B_2| \gtrsim |\delta B_{Z2}| \sim |k_t B_2 (\delta v_Z)_2/\omega_2| = |k_t \delta\xi_2 B_2|.$$

$\delta\xi$ 为流体元的法向位移,在间断面上连续. 因而 $|\delta B_1/\delta B_2|_{Z=0} \sim (B_1/B_2)\cdot \mathrm{Re}(\tau_1)$. 在 $U \gtrsim U_{CF}$ 时,侧 1 压缩度很小,$\mathrm{Re}(\tau_1) \ll 1$. 例如,$U \simeq 0.68$,$\mathrm{Re}(\tau_1) \simeq 0.02$. 故即使 $B_1 > B_2$,仍有 $|\delta B_1/\delta B_2| < 1$. 另外,计算还表明,在日侧低纬区 $\langle \delta E_K \rangle_1 / \langle \delta E_B \rangle_1 > 1$.

关于能量分配的又一个重要结论可由图 1(b) 看出. $\langle \delta E_0 \rangle_2$ 为相对于磁鞘流静止的参考系中波的能量密度. 由定义知,"静止参考系"中 K-H 波为正能波. 但是在磁层参

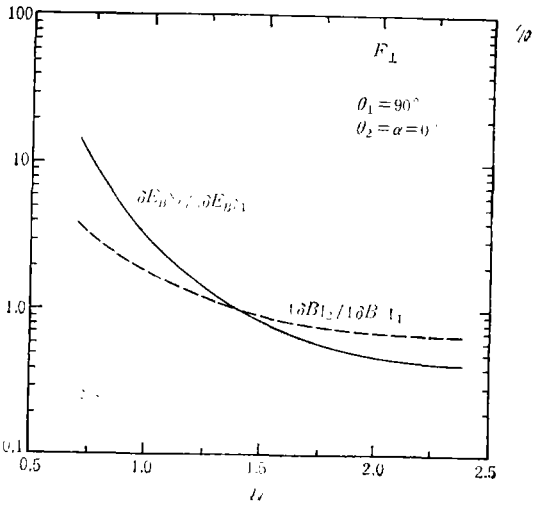

图1（a）　$\langle\delta E_B\rangle_2/\langle\delta E_B\rangle_1$ 随 U 的变化

Fig. 1a The radio of $\langle\delta E_B\rangle_2/\langle\delta E_B\rangle_1$ varies as the function of U

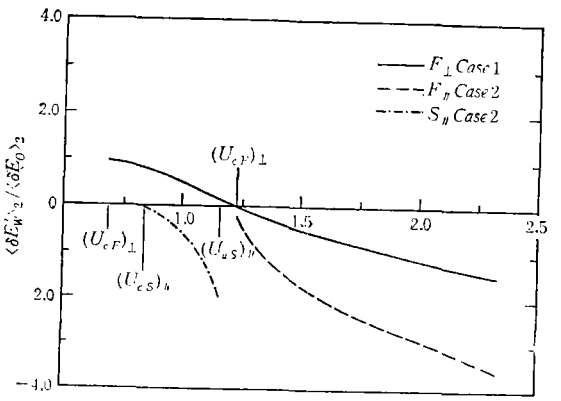

图 1(b)　$\langle\delta E_W\rangle_2/\langle\delta E_0\rangle_2$ 随 U 的变化

Fig. 1b The radio of $\langle\delta E_W\rangle_2/\langle\delta E_0\rangle_2$ varies as the function of U

考系中，模型 2 快波和慢波均有 $\langle\delta E_W\rangle<0$，都是负能波．而模型 1（仅有快波）随 U 增大由正能波变成了负能波．这一结果并不奇怪．因[2]

$$\delta\boldsymbol{v}_t=\frac{w_0}{(1+\tau^2)}\,\frac{w_0^2-(1+\tau^2)v_A^2\cos^2\theta}{w_0^2-v_A^2\cos^2\theta}\,\frac{\delta\rho}{\rho}\,\frac{\boldsymbol{k}_t}{k_t},\tag{8}$$

磁鞘中 $\boldsymbol{k}_t/\!/\boldsymbol{v}_0$，$w_{2r}=\mathrm{Re}(w_{02})<0$，且通常有 $w_{2r}^2>v_{A2}^2$，故 $\delta\boldsymbol{v}_t\cdot\delta\rho^*$ 与 $\boldsymbol{v}_0$ 反平行．因而 $\langle\delta\boldsymbol{E}'_K\rangle_2<0$．$U$ 足够大时便导致 $\langle\delta E_W\rangle_2<0$．下节将看到，波能密度之正负对能流密度的方向有决定性影响．

三、能流密度

按朗道和栗弗席兹[8]，磁流体中能流密度的普遍表达式为

$$\boldsymbol{F}=\rho(h+v^2/2)\boldsymbol{v}+\frac{B^2}{\mu_0}\boldsymbol{v}-\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{v}}{\mu_0}\boldsymbol{B}. \tag{9}$$

设扰动前能流密度为 $\boldsymbol{F}_0$，扰动后，准确到二级近似，波的能流密度 $\langle\delta\boldsymbol{F}\rangle$ 为

$$\langle\delta\boldsymbol{F}\rangle=\langle\delta\boldsymbol{F}_0\rangle+\langle\delta\boldsymbol{F}'\rangle, \tag{10}$$

$\langle\delta\boldsymbol{F}_0\rangle$ 是静止等离子体中波的能流密度. $\langle\delta\boldsymbol{F}'\rangle$ 等于

$$\langle\delta\boldsymbol{F}'\rangle=\left[\rho(\delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_0)\delta\boldsymbol{v}-\frac{\delta\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{v}_0}{\mu_0}\delta\boldsymbol{B}+(\delta\rho\delta h+\rho\delta v^2/2+\delta B^2/\mu_0)\boldsymbol{v}_0\right]_{rr}, \tag{11}$$

角标 rr 表示仅取实部相乘. 上述各式中 h 为焓. 磁鞘一侧 $\langle\delta\boldsymbol{F}'\rangle$ 的法向分量

$$\langle\delta F_Z\rangle_2=\langle\delta F_{Z0}\rangle_2+\langle\delta F'_Z\rangle_2, \tag{12}$$

$$\langle\delta F'_Z\rangle_2=C'^2_F|\delta\rho_2|^2e^{2\omega_i t}/4\rho_2, \tag{13}$$

$$C'^2_F=\left(\frac{w_{20}v_0}{1+\tau_2^2}\right)\left(\frac{\omega_{20}^3\tau_2}{(1+\tau_2^2)(w_{20}^2-v_{A2}^2)}\right)^*+cc. \tag{14}$$

$\langle\delta F_{Z0}\rangle_2$ 的表达式见[2]. $\langle\delta F_Z\rangle_1\geqslant 0$. $\langle\delta F_Z\rangle_2/\langle\delta F_Z\rangle_1$ 随 U 的变化见图 2. 由图知，当 $U\lesssim$ 某临界值前后，模型 1 的 $\langle\delta F_Z\rangle_2$ 分别为负和正，即磁鞘侧能流分别由磁层顶指向磁鞘和相反. 模型 2 的快波和慢波均有 $\langle\delta F_Z\rangle_2>0$. 仔细对比图 1(b) 和图 2 中 $\langle\delta F_Z\rangle_2$ 和 $\langle\delta E_W\rangle_2$ 与 U 的关系，可发现前者由负值到正值的转折点与后者由正变负的临界点重合. 这一结果含有深刻的物理内容. 它说明同等离子体其他不稳定性一样，激发 K-H 正能波，要由外部向等离子体提供能量，即能流由磁层顶指向等离子体；激发负能 K-H 波，必需从等离子体中取走能量，即能流应由等离子体指向磁层顶.

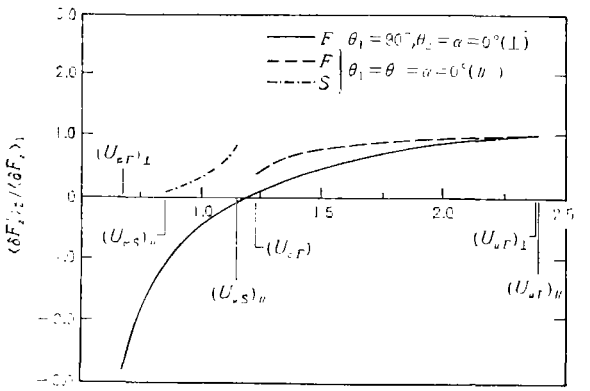

图 2 $\langle\delta F_Z\rangle_2/\langle\delta F_Z\rangle_1$ 随 U 的变化

Fig. 2 The radio of $\langle\delta F_Z\rangle_2/\langle\delta F_Z\rangle_1$ as the function of U

其实上述结论可以用简易的物理图象说明. 若在 $Z=0$ 平面上取单位面积为底，在侧 2 做长柱体，高 $h\to\infty$. 将守恒方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V E\mathrm{d}V=-\oint_S\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}, \tag{15}$$

用于该柱体，可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \langle \delta E_W\rangle \mathrm{d}V = 2\omega_i \iiint_V \langle \delta E_W\rangle \mathrm{d}V$$

$$= -\oiint_S \langle \delta \boldsymbol{F}\rangle \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{16}$$

其中 $\delta \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}_0$，$\delta E_W = E - E_0$. 因 $|Z| \to \infty$ 时，$E \to E_0, \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}_0$，

$$-\oiint_S \langle \delta \boldsymbol{F}\rangle \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\langle \delta F_Z\rangle_2|_{Z=0}.$$

故 $\omega_i > 0$ 时，$\langle \delta F_Z\rangle_2$ 与 $\langle \delta E_W\rangle_2$ 反号.

由上述结果可导出又一重要结论：K-H 波的自由能是由间断面的速度剪切提供的. 若再以 $Z = 0$ 单位面积为底向两侧做柱体元，$|\Delta Z_1| = |\Delta Z_2| \to 0$. 将(15)或(16)式用于该柱体元，得到

$$\Delta(\langle \delta F_Z\rangle)_{Z=0} = (\langle \delta F_Z\rangle_1 - \langle \delta F_Z\rangle_2)_{Z=0} = -\frac{\partial}{\partial t}(\Delta \delta E_W).$$

上式左侧为间断面向两侧输送之净能流密度，右侧为间断面内能量密度减少率. 计算表明，$U > U_C$ 即 $\omega_i > 0$ 后，$\Delta(\langle \delta F_Z\rangle)_Z > 0$，这表明 K-H 不稳定性发生时，间断面向外提供能量，自身能量减少. $U \geqslant U_{\#}$ 即 $\omega_i = 0$ 时，$\Delta(\langle \delta F_Z\rangle)_{Z=0} = 0$，即 $\langle \delta F_Z\rangle_1|_{Z=0} = \langle \partial F_Z\rangle_2|_{Z=0}$. 此时 K-H 波已转化为体波[1]，入射波和透射波的法向能流连续. 这一结论也可用解析方法证明.

图 3 画出了 $\langle \delta F_Z\rangle_1$ 随 U 的变化关系，其中 $|\delta B_{//2}|$ 取为 $3nT$. 由图知，模型 1 和 2(分别用下标 $F_\perp$ 和 $F_{//}$ 表示)的快波均能提供 $\gtrsim 10^{-10}\mathrm{erg\cdot cm^{-2}\cdot s^{-1}}$ 的能流. 假设当波饱和后能流密度的表达式与线性近似相去不远. 该能流可以维持地磁脉动的能量损耗[2]. 它

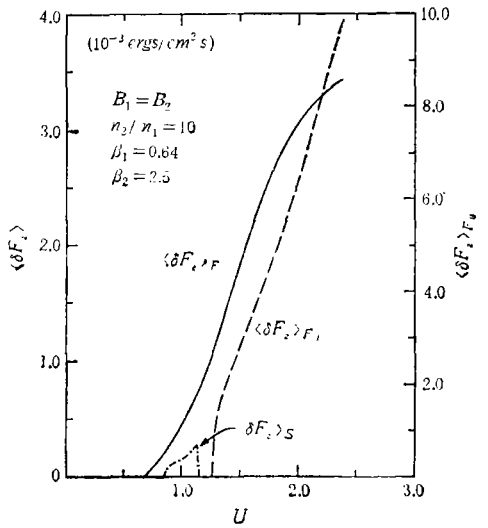

图 3　$\langle \delta F_Z\rangle_1$ 随 U 的变化

Fig. 3　The variations of $\langle \delta F_Z\rangle_1$ with U

比计及低纬边界层效应后输入磁层的能源密度小，但量级相同.

四、动 量 输 运

MHD 近似下动量守恒方程形如 $\partial\rho\boldsymbol{v}/\partial t = -\nabla\cdot\vec{\Pi}$，或 $\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}V = -\oiint_S \vec{\Pi}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，其中 $\vec{\Pi}$ 是动量流密度张量，定义为 $\vec{\Pi} = \rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}}{\mu_0}$. 波的动量密度意义为扰动前后 $\vec{\Pi}$ 之差对周期的平均. 因 $\oiint_S \rho\mathrm{d}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$[7,9]和 $\oiint_S \langle\rho\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_0\rangle\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$，准确到二级近似时 MHD 波的动量流密度张量可表达为 $\langle\delta\vec{\Pi}\rangle = \langle\rho\delta\boldsymbol{v}\delta\boldsymbol{v} - \frac{\delta\boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{B}}{\mu_0}\rangle_{rr}$，在不可压缩假设中 δB_t 与 δB_Z、δv_t 和 δv_Z 间位相差均为 90°，故 $\langle\delta\Pi_{tZ}\rangle = 0$，$\langle\delta\Pi_{tZ}\rangle$ 的意义为沿法向单位时间通过单位面积的切向动量. 可压缩情形下 $\langle\delta\Pi_{tZ}\rangle_{Z=0}$ 随 U 的变化见图4，其中实、虚线分别代表磁层和磁鞘，$|\delta B_{//2}|$ 也取为 $3nT$. 由图知在 $\omega_i > 0$ 时 $\langle\delta\Pi_{tZ}\rangle_{1,2}$ 皆为正. $U \geqslant U_{uF}$ 后 $\langle\delta\Pi_{tZ}\rangle_1 = \langle\delta\Pi_{tZ}\rangle_2$，说明体波的法向动量输运连续. 这同样可用解析方法证明.

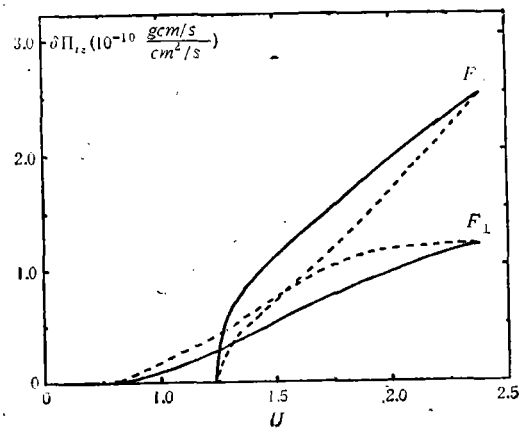

图 4 $\langle\delta\Pi_{tZ}\rangle$ 随 U 的变化

Fig.4 The variations of $\langle\delta\Pi_{tZ}\rangle$ with U

可压缩 K-H 不稳定性由磁鞘向磁层输运动量，可增强磁层对流. 引进 $\Delta V_{t1} = \langle\delta V_t\delta\rho_1\rangle_{cc}/\rho_1$，设 $|\delta B_{//2}| = 2-3nT$，计算得 $U\sim 1$ 时，$\Delta V_{t1}\sim 0.1$—$0.2V_A$. 取 $v_{A1}\sim$ 400km/s，则 $\Delta v_{t1}\sim 40$—80km/s. 可见它对磁层对流能有重要的贡献. 可压缩 K-H 不稳定波的这一效应，是对 Axford 和 Hines[10] 关于磁层边界存在准粘性假说的有力支持. 因波长远大于磁层顶厚度 (L) 时磁层顶可看作为间断面. 此时可定义等效粘滞系数 μ_e 满足 $\langle\delta\Pi_{tZ}\rangle = \mu_e\frac{dV_0}{dZ}$. 取 $L\sim 400$km，$U\sim 300$km/s，对于模型 1 可得 $\mu_e\sim 4.5\times 10^{-12}$kg/m·s；对模型 2，$\mu_e\sim 1.4\times 10^{-11}$kg/m·s. 与 Axford 和 Hines 的经验值 1.7×10^{-11} 量级相同. 说明 K-H 不稳定性可产生很强的准粘性效应.

五、结 束 语

太阳风可通过两种基本方式向磁层输运能量和动量：磁力线重联和磁层边界的波与不稳定性．尽管前者，尤其是所谓通量管传输事件[11,12]，已由观测所证实，但因为约 30% 的晨昏电位降与行星际磁场方向无关，后者仍然是重要的输运途径．可压缩 K-H 不稳定性则是其中有效的机制之一．微观不稳定性、磁鞘 MHD 波的直接透射等所起的作用也不可忽略．作者不想、也不可能在此作全面讨论．本文和前文的计算表明，可压缩 K-H 不稳定性有可能对太阳风-磁层耦合起重要影响．当然，完满和确切的论证还有待于在恰当的模型下进行数值模拟．

参 考 文 献

[1] Pu Zu-yin and M. G. Kivelson, *J. Geophys. Res.*, Vol. **88**, p. 841, 1983.
[2] Pu Zu-yin and M. G. Kivelson, *J. Geophys. Res.*, Vol. **88**, p. 853, 1983.
[3] Miura, A., Computer Simulation of Space Plasmas (Ed. by H. Matsumoto and T. Sato), Terra Scientific Publishing Company, p. 203, 1985.
[4] Miura, A., *J. Geophys. Res.*, Vol. **89**, p. 801, 1984.
[5] 濮祖荫，全国空间物理学术会议文集，科学出版社，第18页，1982.
[6] Anderson, J. E., Magnetohydrodynamic Shock Waves, MIT Press, 1963.
[7] Greenstadt, E. W. et al., *Geophys. Res. Lett.*, Vol. **10**, p. 659, 1983.
[8] Landau, L. D. and E. M. Lifshitz, Electrodynamics of Continuous Media, Pergammon, 1960.
[9] Л. Д. 郎道和 Е. М. 栗弗席兹，连续介质力学，第二册，人民教育出版社，1960.
[10] Axford, W. I. and C. O. Hines, *Can. J. Phys.*, Vol. **39**, p. 1433, 1961.
[11] Russell, C. T. and R. C. Elphic, *Geophys. Res. Lett.*, Vol. **6**, p. 33, 1979.
[12] Lee, L. C. and Z. F. Fu, *Geophys. Res. Lett.*, Vol. **12**, p. 105, 1985.

The Kelvin-Helmholtz Instability at the Magnetopause (III) Transport of Energy and Momentum by Compressional Unstable Waves

Pu Zu-yin

(Dept. of Geophys, Peking University)

M. G. Kivelson

(Dept. of Earth and Space Sciences, University of California, Los Angeles)

Abstract

Assuming the Earth's magnetopause to be an one dimentional tangential discontinuity, the transport of energy and momentum on both sides of the magnetopause caused by compressional Kelvin-Helmholtz unstable waves are investigated. The physical mechanism is also discussed. The calculations show that the Kelvin-Helmholtz instability can indeed play an important role in the coupling processes between the solar wind and the magnetosphere.