第6卷 第4期 空间科学学报 Vol. 6, No. 4
1986年10月 CHINESE JOURNAL OF SPACE SCIENCE Oct., 1986

射电天文中电离层折射的计算与改正

柴 燕 韩文焌
(中国科学院北京天文台)

摘 要

本文利用极坐标下斯涅尔定律，系统地讨论了电离层折射对赤经赤纬的修正问题，并据此给出了射线描迹法。结合北京地区电离层探测资料，对电离层折射造成的赤经赤纬的修正进行了理论估算，得到了一些有意义的结论。

一、引 言

电离层折射修正是一个比较经典的问题。射电天文中采用以标准源为基准进行电离层折射的修正只是一个笼统的物理概念，而且也只有视场内存在标准源时才能校准，要了解电离层折射的内在本质，并对其量级进行理论的估计仍要借助电离层模型进行修正的理论方法。许多人对该问题作过论述[1-5]。但结合天球坐标加以论述的文章尚不多见。本文抛弃了简单的电离层球面成层的假设；并考虑到在费涅尔区的范围内电离层不会有大的变化，这样把三维不均匀的问题化为射线面内两维不均匀问题加以解决(即忽略射线方位角的偏折)。电离层折射在天文中的应用[6]迄今仍多引用文献[3]，但该文应用范围有局限性而且谈得不够清楚。本文采用极坐标下的斯涅尔定律对天文折射公式作了详细的讨论，并据此给出了一种射线描迹的方法。结合北京地区电离层情况，估算了电离层的折射误差，得到了一些有意义的结论。

二、电离层折射修正

如图所示，q' 为射线的方位角，L 和 φ 分别为射线上任意点的地理经度和纬度（弧度），$P'T$ 为射线元 ds，T' 为 T 在 P' 所处的球面上的投影，$d\beta$ 为射线元对应的地心角。以地球中心为原点，在射线面内建立极坐标 (r,β)，则电离层折射指数 $\mu=\mu(r,\beta)$，可表示成：$\mu^2=1-\frac{f_c^2(\beta)}{f^2}F(r)$，其中 f 为频率(兆赫)，f_c 为电离层临界频率（兆赫），$F(r)$ 为电离层模型函数，由费马原理可得：

$$\frac{d}{dr}\left(\mu r^2\frac{d\beta}{ds}\right)=\frac{ds}{dr}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}. \tag{1}$$

本文于1986年3月13日收到.

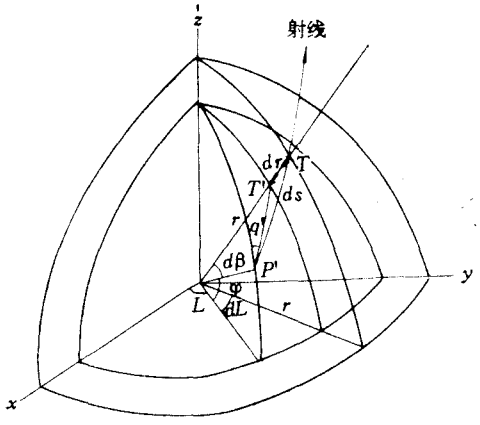

图 1　射线的几何关系
Fig.1　Geometric relations of the ray path

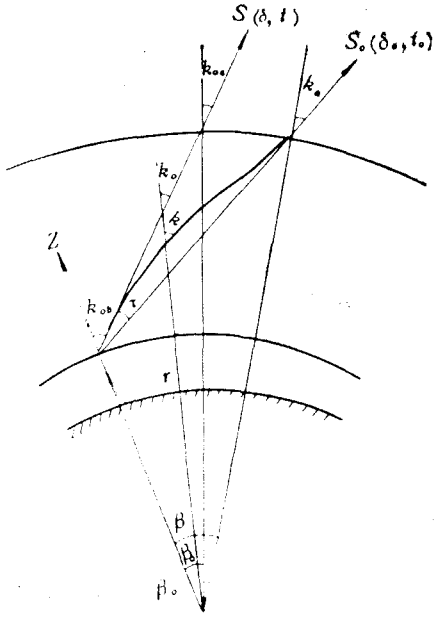

图 2　极坐标下的折射误差
Fig.2　Refraction errors in polar coordinates

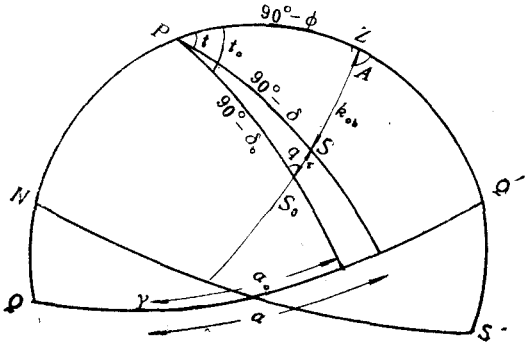

图 3　天球坐标下的折射误差
Fig. 3　Refraction errors in celestial coordinates

从图 1 所示几何关系：

$$\cos k = \frac{dr}{ds},\quad \sin k = r\frac{d\beta}{ds}, \tag{2}$$

可得极坐标下的斯涅尔定律如下：

$$\mu r \sin k = (r_m - y_m)\sin k_{0b} + \int_{r_m - y_m}^{r} \sec k \frac{\partial \mu}{\partial \beta}\, dr. \tag{3}$$

其中 k 为射线上任意点的天顶角，y_m 为电离层的半厚，k_{ob} 为射线底部的天顶角。由(3)式可以看出，若不考虑水平不均匀性，即 $\frac{\partial \mu}{\partial \beta} = 0$，就得到普遍熟知的球面成层下的斯涅

尔定律.

如图 2 所示，S_0 是真实的射电源，S 是视在源，τ 则为电离层折射造成的仰角误差. 从图 2 不难得到

$$\tau = (k_a - k_{oa}) + (\beta - \beta_0). \tag{4}$$

由(2)式可得

$$\beta - \beta_0 = \int_{r_m - y_m}^{r_m + y'_m} \frac{\operatorname{tg} k - \operatorname{tg} k_0}{r}\, dr. \tag{5}$$

为方便起见，记 $\tau_\omega = k_a - k_{ob}$，$\tau_s = \beta - \beta_0$，则有 $\tau = \tau_s + \tau_\omega$，利用(3)式及真空中斯涅尔定律可得

$$\begin{cases} \sin k_a = \dfrac{r_m - y_m}{r_m + y'_m} \sin k_{ob} + \dfrac{1}{(r_m + y'_m)} \displaystyle\int_{r_m - y_m}^{r_m + y'_m} \sec k \frac{\partial \mu}{\partial \beta}\, dr, \\ \sin k_{oa} = \dfrac{r_m - y_m}{r_m + y'_m} \sin k_{ob}. \end{cases} \tag{6}$$

注意到 $\tau_\omega = k_a - k_{oa}$ 是一小量，则在近似条件

$$A \equiv \frac{1}{(r_m + y'_m)} \int_{r_m - y_m}^{r_m + y'_m} \sec k \frac{\partial \mu}{\partial \beta}\, dr \ll \cos k_{oa}$$

满足的情况下，有

$$\tau_\omega = \frac{1 - \sqrt{1 - 2A \sin k_{oa} \sec^2 k_{oa}}}{\operatorname{tg} k_{oa}}, \tag{7}$$

因此得到

$$\tau = \frac{1 - \sqrt{1 - 2A \sin k_{oa} \sec^2 k_{oa}}}{\operatorname{tg} k_{oa}} + \int_{r_m - y_m}^{r_m + y'_m} \frac{\operatorname{tg} k - \operatorname{tg} k_0}{r}\, dr. \tag{8}$$

当 k_{oa} 很小时，即中天时刻附近，(7) 式可化简为

$$\tau_\omega = \frac{\sec k_{oa}}{(r_m + y'_m)} \int_{r_m - y_m}^{r_m + y'_m} \sec k \frac{\partial \mu}{\partial \beta}\, dr. \tag{9}$$

上式可给出文献[3]中所讨论的问题公式.

为使结果简便，沿用文献[3]的数学定义和符号，采用抛物线模型. 令

$$\sigma = (f_c^2 / f^2) \sec^2 k_{oa},$$

$$\bar{\omega}(\sigma) = \frac{3}{4\sigma} \left[\frac{(1 + \sigma)}{2\sqrt{\sigma}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\sigma}}{1 - \sqrt{\sigma}} \right) - 1 \right].$$

通过计算得到

$$X = \left(\ln \frac{r_m + y'_m}{r_m - y'_m} - \frac{y_m + y'_m}{r_m + y'_m} \right) \bar{\omega}(\sigma).$$

则在 k 是小角度近似(即中天附近)下，可以有

$$\tau = -\left[\frac{(y_m + y'_m) \bar{\omega}(\sigma) \sec^2 k_{oa}}{3(r_m + y'_m) f^2} + \frac{\sec k_{oa}}{3f^2} X \right] \frac{\partial f_c^2}{\partial \beta}. \tag{10}$$

从(10) 式可以看出，如果不考虑电离层折射指数的水平不均匀性，即 $\partial f_c^2 / \partial \beta = 0$，则 $\tau = 0$，即电离层折射后的总效应并没有发生偏折. 这是由于电离层折射指数的特殊变化状态造成的. 因此，可以清楚地认识到正是水平不均匀性造成了射线的折射误差.

图 3 所示 $S(\delta, \alpha)$, $S_0(\delta_0, \alpha_0)$ 两点分别为图 2 中视在源和真实源在天球上的投影，其中 α 为赤经，δ 为赤纬，视在源和真实源之间的坐标之差为

$$\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0, \qquad \Delta\delta = \delta - \delta_0. \tag{11}$$

利用天文坐标转换公式和球面三角关系，注意到视在源以 k_{ob} 为天顶角，真实源以 $(k_{ob} + \tau)$ 为天顶角，由于 τ 很小，则可得到

$$\Delta\delta = \cos q(-\tau), \qquad \Delta\alpha = \sec\delta \sin q(-\tau). \tag{12}$$

其中 q 为星位角，这组方程与文献[7]给出的结果是一致的，把 (8) 式代入 (12) 式，就可以得到考虑电离层折射影响造成的赤经赤纬修正公式：

$$\begin{cases} \Delta\delta = \cos q \left(\dfrac{-1 + \sqrt{1 - 2A \sin k_{oa} \sec^2 k_{oa}}}{\operatorname{tg} k_{oa}} - \displaystyle\int_{r_m - y_m}^{r_m + y'_m} \frac{\operatorname{tg} k - \operatorname{tg} k_0}{r} dr \right), \\ \Delta\alpha = \sec\delta \sin q \left(\dfrac{-1 + \sqrt{1 - 2A \sin k_{oa} \sec^2 k_{oa}}}{\operatorname{tg} k_{oa}} - \displaystyle\int_{r_m - y_m}^{r_m + y'_m} \frac{\operatorname{tg} k - \operatorname{tg} k_0}{r} dr \right). \end{cases} \tag{13}$$

当 k 较小时，即中天附近，利用(10)式得到

$$\begin{cases} \Delta\delta = \cos q \left[\dfrac{(y_m + y'_m)\bar{\omega}(\sigma)\sec^2 k_{oa}}{3(r_m + y'_m)f^2} + \dfrac{\sec k_{oa} X}{3f^2} \right] \dfrac{\partial f_c^2}{\partial \beta}, \\ \Delta\alpha = \sin q \sec\delta \left[\dfrac{(y_m + y'_m)\bar{\omega}(\sigma)\sec^2 k_{oa}}{3(r_m + y'_m)f^2} + \dfrac{\sec k_{oa} X}{3f^2} \right] \dfrac{\partial f_c^2}{\partial \beta}. \end{cases} \tag{14}$$

当 k 较大时，则使用下节给出的射线描迹法进行计算.

三、射线描迹方法

射线描迹的方法很多，本文从极坐标斯涅尔定律出发给出的射线描迹方法仍有实际意义. 依据此法可求出射线出电离层顶时的地理坐标.

由射线几何关系图 1，有

$$d\varphi = \cos q' d\beta, \quad \cos\varphi dL = \sin q' d\beta. \tag{15}$$

近似地有

$$\begin{cases} \varphi(r) = \varphi_0 + \cos q'_0 \beta(r); \\ L(r) = \begin{cases} L_0 + \operatorname{tg} q'_0 \ln \dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\varphi(r)\right)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\varphi_0(r)\right)}, & (q' \neq 90^\circ) \\ L_0 + \dfrac{1}{\cos\varphi_0}\beta(r). & (q' = 90^\circ) \end{cases} \end{cases} \tag{16}$$

其中

$$\beta(r) = \int_{r_m - y_m}^{r} \frac{\operatorname{tg} k}{r} dr.$$

从射线定标可知，射线轨迹可按 $[r \cdot \varphi(r) \cdot L(r)]$ 逐点定出，因此计算 $\beta(r)$ 就是本文描迹方法的关键，如果 $\beta(r)$ 可计算出，那么 k 比较大时的 τ_s, τ_ω, 以及 $\Delta\delta$、$\Delta\alpha$ 的数值均可从下述公式求出.

$$\mu_i(r_i) r_i \sin k_i = (r_m - y_m)\sin k_{ob} + \sum_{j=1}^{i} \sec k_{j-1} \left(\overline{\frac{\partial \mu}{\partial \beta}}\right) \Delta r, \tag{17}$$

$$\beta_i(r_i) = \sum_{j=1}^{i} \frac{\mathrm{tg}k_{j-1}}{r_j} \Delta r, \tag{18}$$

$$\mu_i(r_i) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right) \frac{f_{ci}^2}{f^2} F(r_i), \tag{19}$$

$$f_{ci}^2 = f_{co}^2 + \left(\overline{\frac{\partial f_c^2}{\partial \beta}}\right) \beta_{i-1}. \tag{20}$$

这里 $k_0 = k_{ob}$, $\beta_0 = 0$. 由于 β_i 变化很小, $\overline{(\partial f_c^2/\partial\beta)_i}$ 采用平均观测值.

根据上面的公式,就可以求出 k_i. β_i, 再利用 $\varphi(r)$, $L(r)$ 的公式, 就可以逐点得出 $[r_i, \varphi(r_i), L(r_i)]$, 因而也不难由此计算出射线出电离层顶时的地理坐标, 上述方法是 k 为大角度时,计算电离层折射误差的有效方法.

四、计 算 实 例

北京地区电离层资料与数据见表 1.

表 1 电离层参数

太阳活动 \ 月份 \ 参数		r_m (km)	y_m (km)	y'_m (km)	$\overline{f_c^2}$ (MHz)	$\left(\overline{\frac{\partial f_c^2}{\partial \varphi}}\right)$	$\left(\overline{\frac{\partial f_c^2}{\partial \varphi}}\right)_{\max}$
高 年	1	6623	119	411	6.99	67	197
	7	6650	120	412	8.08	34	70
低 年	1	6601	119	409	4.19	21	46
	7	6588	119	408	5.63	17	26
平均值		6615	119	410	6.22	35	85

下面利用本文公式计算几个实例,取 $\partial f_c^2/\partial\beta = 100$, 观测频率 $f = 100$MHz, 考虑 k 为小角度下近似,可分别求出 τ_s、τ_ω、$\Delta\delta$、$\Delta\alpha$ 的数值如表 2 所示.

表 2 计算结果*

$k_{o\alpha}$	τ_ω (角分)	τ_s (角分)	$\Delta\delta$ (角分)	$\Delta\alpha$ (角分)
1°	0.87	0.02	0.62	0.88
10°	0.89	0.02	0.64	0.91
20°	0.98	0.02	0.71	1.00

* ($\delta = 45°$, $q = 45°$)

五、讨论与结论

1. 电离层折射引起的赤经赤纬修正公式为(13)式,特别是中天时刻附近,有简化公式(14)式. 从结果可知, $\Delta\delta$、$\Delta\alpha$ 均与电离层折射的仰角误差成正比,还与天体的星位角有

着"H"型不均匀性．"O"型不均匀性的主要特点是，其相速随时间变化，并且与电子漂移速度和波矢仰角成正比，这与线性色散方程[8]预计的相同．"O"型不均匀性的湍动水平要比正常情况下观测到的湍动水平低得多．"H"型不均匀性的主要特点是其相速方向是水平或准水平的，并且，相速度量值不随时间变化．

目前没有理论解释上述反向电射流中不均匀性的特点．关于正常电射流双流不稳定性（I 型不均匀性）有如下的理论工作[9-14]．Kaw[9] 指出 I 型电射流波动是对流的，就是说，在不稳定波沿着其群路径传播的过程中，波矢是变化的，波只在群路径中的某一段是增长的；Lee 和 Keneel[10] 计算了 I 型波沿着其群路径的积分线性增长率．由于计算出的积分增长率太大，达 10^{2-3} 的量级，因而推论准线性饱和机制必然起作用，也就是说，波将处于饱和状态，波矢将接近水平方向；Crochet 等[6]根据上述正常电射流双流不稳定性的理论推测："H"型不均匀性可能是由于不稳定性的准线性饱和导致的，但是不能说明"O"型不稳定性的产生机制．显然，上述关于正常电射流不稳定性的理论不能直接用来描述反向电射流中的不稳定性．因为在上述理论计算中电子密度梯度的作用被忽略了，并且所处理的波动群速的方向是向上的，在反向电射流条件下电子密度梯度的作用不能忽略，并且波动群速的方向是向下的．显然，需要考察是否在反向电射流的条件下，波动振幅可在其传播过程中增长到足够大而达到准线性饱和，并且还需要说明，为什么在电射流的上层，波却保持在线性状态．

本文将在反向电射流的条件下，计算 10 米波长的波动的对流放大特性，说明在何种情况下，该波动可增长达到饱和，又在何种情况下波动虽然增长，但仍保持在线性状态，最后说明，在反向电射流条件下波的对流放大特性能解释那些观测现象．

二、计 算 公 式

下面首先讨论在有中性风条件下赤道电射流中电子和离子的漂移速度，然后利用文献[13]和[7]给出的不稳定性的色散方程和增长率的公式，讨论反向电射流条件下，双流不稳定性的对流放大特性．

当存在较强的中性风时，由于离子与中性成份的碰撞频率较大，因而在静止参考系中不能忽略离子的运动速度．在电射流处于正常情况下，电子和离子的运动满足如下方程式[15]*

$$q_j\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{V}_j}{c}\times\boldsymbol{B}\right)-\nu_j m_j(\boldsymbol{V}_j-\boldsymbol{V}_w)=0, \tag{1}$$

式中下标 $j=i,e$，分别表示相应于电子和离子的物理量；$\boldsymbol{V}_j$ 是粒子漂移速度，ν_j 为粒子与中性成份的碰撞频率，m_j 为粒子质量，$\boldsymbol{V}_w$ 为中性风速，$\boldsymbol{B}$ 为磁场，$\boldsymbol{E}$ 为电场，c 为光速．在静止参考系中选取直角坐标系，使 x 轴指向东，y 轴指向北，z 轴竖直向上．磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 指向北．中性风速为

$$\boldsymbol{V}_w=V_w\hat{e}_x, \tag{2}$$

* 更正、涂传诒，空间科学学报，第 5 卷，第 102 页，(6)式应为 $\nabla P_{0j}=kT_j\nabla n_0$.

$\hat{e}_x$ 为 x 方向单位矢量. 由于潮汐风随高度变化的尺度很大,本文假设在电射流内 V_w 为常数. 水平方向电场 $\boldsymbol{E}_D$ 可表示为

$$\boldsymbol{E}_D = E_D \hat{e}_x. \tag{3}$$

假设电射流导电层是平面分层的, ν_i 和 ν_e 只随 z 而变化. 由于电射流导电层的厚度是有限的,在平衡条件下,垂直方向的电流为零,有

$$\hat{e}_z \cdot (\boldsymbol{V}_i - \boldsymbol{V}_e) = 0. \tag{4}$$

在电射流层中有[10]

$$\frac{\nu_e}{\Omega_e} \ll 1, \tag{5}$$

$$\frac{\nu_i}{\Omega_i} \gg 1. \tag{6}$$

由方程 (1)—(6) 可得:

$$V_{ex} - V_{ix} = \frac{-\nu_i}{\Omega_i} \frac{1}{1+\alpha} V_0, \tag{7}$$

$$V_{ix} = V_w + \frac{\nu_e}{\Omega_e} \frac{1}{1+\alpha} V_0, \tag{8}$$

$$V_{iz} = \frac{1}{1+\alpha} V_0. \tag{9}$$

式中 $V_0 = (c/B)E_D$. 在推导(7)式时用到条件(5)和(6),在下面讨论中也还要用到这两个条件. 由这一结果可知, $(V_{ex} - V_{ix})$ 和 V_{iz} 都同中性风速 V_w 无关,只有 V_{ix} 同 V_w 有关. 由于通常 $V_w \geqslant V_0$ (当 $E_D = 1\text{mV/m}$ 时, $V_0 \sim 33\text{m/s}$), 于是 $V_{ix} \simeq V_w$, 离子在水平方向以中性风速度运动. V_{iz} 与 V_0 同量级, 因为 α 值小于 1. 由(7)式得到 $|V_{ex} - V_{ix}| \gg V_0$, 这表明在水平方向, 电子与离子之间有很大的相对速度. 正是这一相对运动导致电射流中的双流不稳定性.

在通常情况下, 在赤道电射流的高度范围 (100—110 km), 白天电子密度是向上增加的. 在电射流区的中心, 典型的梯度特征长度 L_N 约为 6km[8]. 在这种情况下, 电子梯度漂移的方向是向西的,而在反向电射流情况下, $E_D < 0$, 电子是向东漂移的,因而电子密度梯度对不稳定性起稳定化的作用.

电射流等离子体不稳定性的线性色散方程和增长率可写为[7,13]

$$\omega_r = \frac{\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{V}_e + \alpha \boldsymbol{V}_i)}{1+\alpha}, \tag{10}$$

$$\gamma = (1+\alpha)^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{\gamma_i} [(\omega_r - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{V}_i)^2 - k^2 c_T^2] - \frac{1}{L_N k^2} \left[(\omega_r - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{V}_i) \left(\frac{\nu_i}{\Omega_i} k_x \right) \right] \right\}. \tag{11}$$

式中 $\alpha = \nu_e \nu_i / (\Omega_e \Omega_i)$; $\boldsymbol{V}_e$ 和 $\boldsymbol{V}_i$ 分别为电子和离子的运动速度; ω_r 为在静止参考系内观察到的不稳定性波的频率实部; $\boldsymbol{k}$ 为波矢, 假设垂直于 $\boldsymbol{B}_0$, k_x 为波矢 $\boldsymbol{k}$ 的水平东向分量; Ω_e 和 Ω_i 分别为电子和离子的磁回旋频率; γ 为增长率; c_T 为声速,取为 350m/s; 对于波长为 10m 的波动,再复合系数的影响很小,所以略去了. 将(7)—(9)代入(10)得到

联系。此外，赤经修正还与源的赤纬有关。这是合乎物理概念的。

2. 由计算结果表明，$\tau_\omega \gg \tau_r$，这说明折射误差主要由电离层水平不均匀性引起。从而在电离层折射修正中不能采用球面成层的简化模型。

3. 中天时刻的折射误差实际上是很小的。k 越大，水平不均匀性越大，因此，中天时刻（k 最小）观测可忽略折射误差。

4. 本文给出的射线描迹公式是考虑了折射指数水平不均匀性的射线描迹方法。从而可获得大角度 k 下的电离层折射误差。

5. 应当指出本文给出的折射误差是指单天线测量的情况。如果是干涉仪系统，则角度误差 $\Delta\theta$ 正比于电离层水平不均匀性引起的两条射线间的相位差；在综合孔径系统中，此角度误差发生在视场中心。

参　考　文　献

[1] Chvojkova, E., *Bull. Astro. Insts. Csl.*, Vol. **9**, p. 133, 1958.

[2] Hagfors, T., *Methods of Experimental Physics*, Vol. **12**, p. 119, 1976.

[3] Komesaroff, M. M., *Australian J. Physics.*, Vol. **13**, p. 153, 1960.

[4] Komesaroff, M. M. and C. A. Shain, *Nature*, Vol. **183**, p. 1584, 1960.

[5] Teleki, G. and J. Saastamoinen, Sun and plantary system, Proceeding of the Meeting held in Dubrovnik, Yugoslavia, p. 455, 1981.

[6] Spoelstra, T. A. Th., *Astro. Astrophys.*, Vol. **120**, p. 313, 1983.

[7] Woolard, E. W. and G. M. Clemence, Spherical Astronomy, Academic Press, p. 99, 1966.

Ionospheric Refraction Correction in Radio Astronomy

Chai Yan　Han Wen-jun

(*Beijing Observatory, Academia Sinica*)

Abstract

Using the Snell's law in polar coordinates, the ionospheric refraction effects on the declination and right ascension determination is discussed in this paper. A ray tracing method is also given. With the ionospheric data observed in Beijing, the correction of ionospheric refraction is estimated and some usefull conclusions are drawn.