联合 CDGPS 技术和星间相对测量进行编队星座状态确定*

范国清　王　威　郗晓宁

(国防科技大学机电工程与自动化学院　长沙 410073)

摘　要　以空间圆 3 星编队星座为对象，建立了联合 GPS 载波相位差分 (Carrier phase Differential GPS, CDGPS) 和星间相对测量进行编队星座状态确定的数学模型；利用高精度的星间相对测量信息给星间公里级基线提供厘米级约束，极大地缩小了星间单差模糊度的搜索空间，进而在卫星无需机动的情况下采用 Bayes 最小二乘法快速解算出星间 GPS 载波相位单差整周模糊度；最后数学仿真证明了方法的有效性，结果表明卫星间相对位置确定精度达 10^{-2} m，卫星姿态确定精度达 10^{-3} rad.

关键词　编队星座；　GPS 载波差分；　星间相对测量；　整周模糊度

中图法分类号　V 412

Formation Constellation States Determination With Carrier Phase Differential GPS and Intra-Satellite Relative Measurement

FAN Guoqing　WANG Wei　XI Xiaoning

(*College of Mechatronics Engineering and Automation, National University of Defense Technology, Changsha* 410073)

Abstract　This paper presents a mathematical model of determining states of three satellites circular formation constellation, which combines the Carrier Phase Differential GPS (CDGPS) with inter-satellite relative measurement. And then, with the centimeter length constraint to the kilometre baseline inter-satellite which supplied by high accurate inter-satellite relative measurement, the search space of ambiguity is compressed impressively. On this base, the integer ambiguity of single CDGPS inter-satellite was initialized quickly using Bayes Least Square without any satellite movement intentionally. Lastly, the availability was proved by mathematic simulation. Learning from the simulation result, the accuracy of relative positions between satellites reaches 10^{-2} m and the accuracy of attitude of satellite reaches 10^{-3} rad.

Key words　Formation constellation, CDGPS, Inter-satellite relative measurement, Integer ambiguity

---

* 国家自然科学基金项目 (10072076), 武器装备预研基金项目 (51400201013KG01) 共同资助

2004-08-16 收到原稿，　2005-03-15 收到修定稿

1 引言

编队卫星星座 (简称编队星座) 是由若干颗相距较近的卫星按照轨道自然特性或通过控制其飞行构成特定形状的卫星群 (又称卫星簇). 作为一个 "虚拟卫星平台", 其分布式卫星整体协同工作并实现应用目标, 例如分布式合成孔径雷达等. 编队星座功能的实现依赖于星座卫星的位置、姿态和时间 (简称状态) 的确定精度, 特别是星间相对位置、卫星姿态及钟差的确定精度.

利用 GPS 载波相位差分 (CDGPS) 技术可实现编队星座的状态确定. 文献 [1] 考虑到编队星座状态间的耦合性和星内、星间 CDGPS 观测数据间的相关性, 基于整网数据处理的理论和方法, 利用星内和星间 CDGPS 观测值进行编队星座卫星姿态和星间相对位置的整体确定, 并在假设整周模糊度已知的前提下证明了该方法的有效性. CDGPS 技术的关键问题是整周模糊度的确定, 特别是星间 CDGPS 的基线为 1 km, 整周模糊度的搜索空间庞大, 初始化工作的快速完成困难很大. 为了在较短时间内使星间 CDGPS 整周模糊度的初始化满足精度要求, 一种有效手段是增加星间相对测量以提供高精度的星间相对测量信息.

所谓星间相对测量技术, 是一种类似 GPS 的伪码测距技术, 简称类 GPS 技术. 该技术是在每个卫星上安装 1 个发射天线和至少 3 个接收天线, 与 GPS 相同, 各卫星发射经过伪码调制的载波信号, 并被其他卫星上的接收天线接收; 与 GPS 不同的是, 它们使用的载波波长和伪码码元更短, 以获得更高精度的相对测量信息. 例如文献 [2] 利用类 GPS 技术, 给深空探测的自主编队飞行任务提供了精度为 1 cm 的星间伪距观测信息和精度为 10 μm 的星间载波观测信息. 高精度的星间相对测量信息不但有助于星间 CDGPS 整周模糊度的快速求解, 而且有利于编队星座状态确定精度的提高.

本文在文献 [1] 的基础上, 以空间圆 3 星编队星座为对象, 加入类 GPS 技术提供的星间相对测量信息, 建立了联合星内、星间 CDGPS 单差和类 GPS 伪距进行编队星座状态确定的数学模型; 研究了星间 CDGPS 单差的整周模糊度求解问题; 最后进行了数学仿真.

2 数学模型

2.1 坐标系统

本文涉及的坐标系包括有地心惯性坐标系、当地水平坐标系 O-$x_Ly_Lz_L$ 、卫星星体坐标系 O-$x_By_Bz_B$ 和类 GPS 天线安装坐标系 O-$x_Ay_Az_A$. 考虑编队星座的对地观测应用, 采用北东地 (NED, O 为卫星的质心, x_L 轴指向北, y_L 轴指向东, z_L 轴指向地) 为当地水平坐标系; 卫星星体坐标系 O-$x_By_Bz_B$ 的定义为: x_B 轴为卫星的纵轴, z_B 轴垂直纵平面向下, y_B 轴构成右手系, 卫星的 3 个姿态角定义为当地水平坐标系按 312 的顺序转到卫星星体坐标系的 3 个欧拉角, 即 ψ_s, θ_s, ϕ_s. 为了描述类 GPS 天线的安装位置, 以各卫星质心为原点建立类 GPS 天线安装坐标系 O-$x_Ay_Az_A$, 其 3 轴指向由类 GPS 天线姿态角 ϕ_A, θ_A, ψ_A (按照 213 顺序由星体坐标系转到类 GPS 天线安装坐标系的 3 个欧拉角) 描述, 当类 GPS 天线姿态角均为 0 时, 类 GPS 天线安装坐标系与星体坐标系重合.

2.2 观测方程

状态确定模型中所用到的观测值包括有星内、星间 CDGPS 单差观测值和类 GPS 伪距观测值.

对编队星座中的第 i 颗卫星, 其星内 CDGPS 单差方程为

$$\Delta\phi_{imj}^k = S_{ik}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{R}_{Bi}^I \cdot \boldsymbol{b}_{imj} + \lambda N_{imj}^k + v_{imj}^k, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{R}_{Bi}^I = \boldsymbol{R}_{li}^I \cdot \boldsymbol{R}_{Bi}^{Li}. \tag{2}$$

其中, $\Delta\phi_{imj}^k$ 为卫星 i 的 GPS 主天线 m 与 GPS 天线 j 对于 GPS 卫星 k 的载波相位单差; S_{ik} 为卫星 i 至 GPS 卫星 k 视线方向的单位矢量 (用卫星 GPS 主天线的伪距定位值计算得到); $\boldsymbol{b}_{imj}$ 为卫星 i 的 GPS 主天线 m 到 GPS 天线 j 在星体坐标系中的基线矢量; λ 为 GPS 载波波长; N_{imj}^k 为卫星 i 的 GPS 主天线 m 与 GPS 天线 j 对于 GPS 卫星 k 的 CDGPS 单差整周模糊度; v_{imj}^k 为 $\Delta\phi_{imj}^k$ 的观测误差; $\boldsymbol{R}_{Bi}^I$ 为从卫星 i 的星体坐标系到地心惯性坐标系的变换矩阵; $\boldsymbol{R}_{Bi}^{Li}$ 为从卫星 i 星体坐标系到当地水平坐标系的变换矩阵, $\boldsymbol{R}_{Li}^I$ 为从卫星 i 当地水平坐标系到地心惯性坐标系的变换矩阵, 具体为

$$\boldsymbol{R}_{Bi}^{Li} = \boldsymbol{R}_z(-\psi_{si}) \cdot \boldsymbol{R}_x(-\theta_{sj}) \cdot \boldsymbol{R}_y(-\phi_{si}), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{R}_{Li}^I(\alpha_i, \delta_i) = \boldsymbol{R}_z(-\alpha_i)\boldsymbol{R}_y(90^\circ + \delta_i). \tag{4}$$

其中， α_i, δ_i 分别为卫星 i 质心的赤经、赤纬 (用卫星主天线的伪距定位值计算得到); $\boldsymbol{R}_\xi(\varphi)$ 为坐标系绕 ξ 轴旋转 φ 角的初等变换矩阵.

以卫星 1 和卫星 i 的 GPS 主天线间组成的星间 CDGPS 单差方程为

$$\Delta\phi^k_{m_1m_i} = \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}_{1k}\boldsymbol{b}_{m_1m_i} + c\tau_{1i} + \lambda N^k_{m_1m_i} + v^k_{m_1m_i}, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}_{m_1m_i} &= [\boldsymbol{r}^I_i + \boldsymbol{R}^I_{Bi}\cdot\boldsymbol{a}^G_{m_i}] - [\boldsymbol{r}^I_1 + \boldsymbol{R}^I_{B_1}\cdot\boldsymbol{a}^G_{m_1}] \\ &= \boldsymbol{r}^I_{1i} + \boldsymbol{R}^I_{bi}\cdot\boldsymbol{a}^G_{m_i} - \boldsymbol{R}^I_{B_1}\cdot\boldsymbol{a}^G_{m_1}.\end{aligned} \tag{6}$$

其中， $\Delta\phi^k_{m_1m_i}$ 为卫星 1 和卫星 i 的 GPS 主天线对 GPS 卫星 k 的载波相位单差； $\boldsymbol{S}_{1k}$ 为卫星 1 的 GPS 主天线 m_1 至 GPS 卫星 k 的视线方向单位矢量 (可用卫星 1 的 GPS 主天线的伪距定位值计算得到); $\boldsymbol{b}_{m_1m_i}$ 为卫星 1 的 GPS 主天线 m_1 到卫星 i 的 GPS 主天线 m_i 的基线矢量； τ_{1i} 为卫星 1 与卫星 i 的 GPS 接收机的钟差之差； c 为光速； $N^k_{m_1m_i}$ 为卫星 1 和卫星 i 的主天线对 GPS 卫星 k 的星间 CDGPS 单差整周模糊度； $v^k_{m_1m_i}$ 为 $\Delta\phi^k_{m_1m_i}$ 的观测误差. $\boldsymbol{a}^G_{m_i}$ 为卫星 i 的 GPS 主天线 m_i 在星体坐标系中的位置矢量； $\boldsymbol{r}^I_i$ 为卫星 i 质心在地心惯性坐标系中的位置矢量； $\boldsymbol{r}^I_{1i}$ 为卫星 1 质心到卫星 i 质心的矢量在地心惯性坐标系中的表示.

方程 (1) 用卫星主天线 m 至 GPS 卫星 k 的视线方向单位矢量代替了卫星中其他天线至 GPS 卫星 k 的视线方向单位矢量，方程 (5) 用卫星 1 主天线 m_1 至 GPS 卫星 k 的视线方向单位矢量代替了卫星 2、3 至 GPS 卫星 k 的视线方向单位矢量，这与实际的视线方向不同，因此要进行相应的视线方向不平行改正 [2].

类 GPS 伪距观测值方程如下.

对卫星 1, 有

$$\begin{aligned}\rho^2_j &= |\boldsymbol{r}^I_{12} + \boldsymbol{R}^I_{A_2}\cdot\boldsymbol{t}^A_2 - \boldsymbol{R}^I_{A_1}\cdot\boldsymbol{a}^A_{1j}| + c\tau'_{12} + v^2_{1j}, \\ \rho^3_{1j} &= |\boldsymbol{r}^I_{13} + \boldsymbol{R}^I_{A_3}\cdot\boldsymbol{t}^A_3 - \boldsymbol{R}^I_{A_1}\cdot\boldsymbol{a}^A_{1j}| + c\tau'_{13} + v^3_{1j}.\end{aligned} \tag{7}$$

对卫星 2, 有

$$\begin{aligned}\rho^1_{2j} &= |-\boldsymbol{r}^I_{12} + \boldsymbol{R}^I_{A_1}\cdot\boldsymbol{t}^A_1 - \boldsymbol{R}^I_{A_2}\cdot\boldsymbol{a}^A_{2j}| - c\tau'_{12} + v^I_{2j}, \\ \rho^3_{2j} &= |-\boldsymbol{r}^I_{12} + \boldsymbol{r}^I_{13} + \boldsymbol{R}^I_{A_3}\cdot\boldsymbol{t}^A_3 - \boldsymbol{R}^I_{A_2}\cdot\boldsymbol{a}^A_{2j}| - \\ &\quad c\tau'_{12} + c\tau'_{13} + v^3_{2j}.\end{aligned} \tag{8}$$

对卫星 3, 有

$$\begin{aligned}\rho^1_{3j} &= |-\boldsymbol{r}^I_{13} + \boldsymbol{R}^I_{A_1}\cdot\boldsymbol{t}^A_1 - \boldsymbol{R}^I_{A_3}\cdot\boldsymbol{a}^A_{3j}| - c\tau'_{13} + v^1_{3j}, \\ \rho^2_{3j} &= |\boldsymbol{r}^I_{12} - \boldsymbol{r}^I_{13} + \boldsymbol{R}^I_{A_2}\cdot\boldsymbol{t}^A_2 - \boldsymbol{R}^I_{A_3}\cdot\boldsymbol{a}^A_{3j}| \\ &\quad + c\tau'_{12} - c\tau'_{13} + v^2_{3j}.\end{aligned} \tag{9}$$

其中， ρ^k_{ij} 为类 GPS 伪距观测值 (i 为接收信号卫星、 j 为卫星 i 的类 GPS 接收天线、 k 为发射信号卫星，且 $i,j,k = 1,2,3$ $(i \neq k)$); $\boldsymbol{a}^A_{ij}$ 为卫星 i 的第 j 个类 GPS 接收天线在类 GPS 天线安装坐标系中的位置矢量； $\boldsymbol{t}^A_i$ 为卫星 i 的类 GPS 发射天线在类 GPS 天线安装坐标系中的位置矢量； τ'_{ij} 为卫星 i 和卫星 j 的类 GPS 天线的钟差之差； v^k_{ij} 为 ρ^k_{ij} 的观测误差； $\boldsymbol{R}^I_{Ai}$ 为卫星 i 的类 GPS 天线安装坐标系到地心惯性坐标系的变换矩阵,

$$\boldsymbol{R}^I_{Ai} = \boldsymbol{R}^I_{Bi}\cdot\boldsymbol{R}_y(-\phi_{Ai})\cdot\boldsymbol{R}_x(-\theta_{Ai})\cdot\boldsymbol{R}_z(-\psi_{Ai}). \tag{10}$$

2.3 状态确定模型和解算方法

联合星内、星间 CDGPS 单差和类 GPS 伪距进行状态确定，方程为

$$\begin{bmatrix}\Delta\phi^k_{imj}\\ \Delta\phi^k_{m_1m_i}\\ \rho^k_{ij}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}h_1(x)\\ h_2(x)\\ h_3(x)\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}N^k_{imj}\\ N^k_{m_1m_i}\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}v^k_{imj}\\ v^k_{m_1m_i}\\ v^k_{ij}\end{bmatrix}. \tag{11}$$

其中， x 为待求参数，包括卫星 i 质心到卫星 1 质心的星间相对位置 (Δx^I_{1i}、Δy^I_{1i}、$\Delta z^I_{1i}, i = 2,3$), 各卫星姿态及钟差； $h_i(x)$ $(i = 1,2,3)$ 表示不同观测量所对应的待求参数的函数.

由于 GPS 除了可提供载波相位测量外，还可用伪距观测值确定卫星质心的绝对位置 $\boldsymbol{r}^I_i$. 故可将 $\boldsymbol{r}^I_i$ 之间做差所得结果作为相对位置的先验信息，采用 Bayes 最小二乘法 (具有先验信息的最小二乘法) 对方程 (11) 进行解算. 但是，因为所用到的观测值精度不同，故在进行 Bayes 最小二乘解算时，必须进行相应权系数的调整. ①以某标准统一 CDGPS 单差观测值和类 GPS 伪距观测值的权系数. 因为方程 (11) 所用观测值以 CDGPS 观测值为主，故将类 GPS 伪距观测值的权系数统一到 CDGPS 单差观测值标准. ②调整相对位置参数的先验权. 相对位置参数的先验权来自 GPS 伪距定位， GPS 伪距观测值的精度远小于 CDGPS 单差观测值精度，也需相应地统一到 CDGPS 单差观测值标准. 根据方程 (11) 进行 Bayes 最小二乘迭代解算，相对位置参数的迭代初值由伪距定位得到的 $\boldsymbol{r}^I_i$ 做差所得，姿态

和钟差参数的迭代初值任意选取，数学仿真证明该方法有效.

2.4 整周模糊度初始化

在进行编队星座状态确定时涉及到的整周模糊度包括星内和星间 CDGPS 单差整周模糊度，在进行状态确定之前首先要完成整周模糊度的初始化. 一种精确估计整周模糊度的方法是在卫星进行较大机动的同时，联合该过程中每一采样时刻的方程，再利用批处理方法进行求解. 尽管该方法是精确的，但它依赖于较大机动，对于卫星而言代价昂贵.

考虑到星内和星间 CDGPS 单差整周模糊度的相关基线长度量级不同，故采用不同的方法进行初始化：对于星内 CDGPS 单差整周模糊度，其基线由同一颗卫星上的不同 GPS 接收天线间的矢量构成，长度为 1 m，因此方程 (1) 属于标准单星定姿问题 [3]，已有许多求解该类型整周模糊度的方法 [4]. 本文的研究重点为星间 CDGPS 单差整周模糊度的求解问题，其基线由不同卫星的 GPS 主接收天线间的矢量构成，长度为 1 km，公里级的基线导致模糊度搜索空间庞大，而且卫星是在高速运动中，用常规方法难以快速准确地解算出来. 本文采用增加星间相对测量的方法，给公里级的基线提供精度为厘米级的高精度约束，大大缩小模糊度的搜索空间，在无需机动的情况下，快速精确完成星间 CDGPS 单差整周模糊度的初始化估计，具体过程如下.

联合 n 个时刻的星间 CDGPS 单差和类 GPS 伪距得方程

$$\begin{bmatrix} \Delta\bar{\phi}^k_{m_1m_i}(n) \\ \bar{\rho}^k_{ij}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{h}_2(\bar{x}) \\ \bar{h}_3(\bar{x}) \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} N \\ 0 \end{bmatrix} + v. \tag{12}$$

其中，$\Delta\bar{\phi}^k_{m_1m_i}(n)$ 为 n 个时刻的星间 CDGPS 单差，$\bar{\rho}^k_{ij}(n)$ 为 n 个时刻的类 GPS 伪距，$\bar{h}_i(\bar{x})$ 为 n 个时刻的状态参数的函数，$\bar{x}$ 为 n 个时刻的所有状态参数，N 为所有星间单差模糊度，v 为观测值误差.

线性化方程 (12) 后得到误差方程为

$$\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{V}_1 \quad \boldsymbol{V}_2]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{G}[\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}} \quad \mathrm{d}N]^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{L}, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_1 & \bar{\lambda} \\ \boldsymbol{G}_2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{L} = [\Delta\bar{\phi}^k_{m_1m_i}(n) \quad \bar{\rho}^k_{ij}(n)]^{\mathrm{T}} - [\bar{h}_2(\bar{x}_0) \quad \bar{h}_3(\bar{x}_0)]^{\mathrm{T}} - \lambda N_0, \tag{15}$$

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + \mathrm{d}\bar{x}, \quad N = N_0 + \mathrm{d}N. \tag{16}$$

其中，$\boldsymbol{V}_i$ $(i = 1, 2)$ 为误差方程的残差，$\boldsymbol{G}$ 为误差方程系数阵，$\boldsymbol{G}_1$ 为星间 CDGPS 单差部分的系数阵，$\boldsymbol{G}_2$ 为类 GPS 伪距部分的系数阵，$\bar{\lambda}$ 为对角元素为 λ 的对角阵，$\mathrm{d}\bar{x}$ 为 n 个时刻的状态参数的改正数，$\mathrm{d}N$ 为星间 CDGPS 单差整周模糊度的改正数，$\boldsymbol{L}$ 为误差方程自由项，$\bar{x}_0$ 为 n 个时刻的所有状态参数的初值，N_0 为星间 CDGPS 单差整周模糊度的初值.

利用 Bayes 最小二乘法进行方程 (13) 的迭代解算，得出

$$[\mathrm{d}\bar{x} \quad \mathrm{d}N]^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{G} + \boldsymbol{P}_0]^{-1} [\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L} + \boldsymbol{P}_0[\bar{x} - \bar{x}_0 \quad N - N_0]^{\mathrm{T}}], \tag{17}$$

$$\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{P}_1 \quad \boldsymbol{P}_2]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{P}_0 = [\boldsymbol{P}_{01} \quad \boldsymbol{P}_{02}]^{\mathrm{T}}. \tag{18}$$

其中，$\boldsymbol{P}$ 为观测值权系数阵；$\boldsymbol{P}_1$ 为星间 CDGPS 单差所对应的权系数阵；$\boldsymbol{P}_2$ 为类 GPS 伪距所对应的权系数阵；$\boldsymbol{P}_0$ 为待求参数的先验值的先验信息权阵；$\boldsymbol{P}_{01}$ 为状态参数先验值的先验信息权阵，它由两部分组成：其一为星间相对位置状态参数的先验信息权阵，由 GPS 伪距定位得到；其二为卫星姿态状态参数的先验信息权阵，由 GPS 载波单星定姿得到. $\boldsymbol{P}_{02}$ 为零矩阵，表示整周模糊度无先验值.

方程 (17) 的单位权中方差 σ_0 和协方差阵 $\boldsymbol{Q}$ 分别为

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{(\mathrm{d}x)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_0\mathrm{d}x + \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}}{m - k}}, \tag{19}$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{xx} & \boldsymbol{Q}_{xN} \\ \boldsymbol{Q}_{Nx} & \boldsymbol{Q}_{NN} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{G} + \boldsymbol{P}_0]^{-1}. \tag{20}$$

其中，m 为观测值个数；k 为具有先验信息的状态参数个数；$\boldsymbol{Q}_{xx}$ 为状态参数部分的协方差阵；$\boldsymbol{Q}_{NN}$ 为星间 CDGPS 单差整周模糊度部分的协方差阵；$\boldsymbol{Q}_{xN}$ 和 $\boldsymbol{Q}_{Nx}$ 为状态参数与星间 CDGPS 单差整周模糊度两者之间的相关阵.

则星间 CDGPS 单差整周模糊度的均方差 σ_{N0} 和第 i 个星间 CDGPS 单差整周模糊度估计误差的协方差 σ_{N_i} 分别为

$$\sigma_{N0} = \sqrt{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{Q}_{NN})}, \tag{21}$$

$$\sigma_{N_i} = \sqrt{q_{N_{ii}}}. \tag{22}$$

其中， Tr 为矩阵的迹； $q_{N_{ii}}$ 为 $\boldsymbol{Q}_{NN}$ 阵对角线的第 i 个元素.

3 数学仿真

在进行数学仿真时，模拟了编队星座各卫星同时可见的 5 颗 GPS 卫星. GPS 接收天线载波相位测量噪声、天线相位中心误差、多路径效应误差分别取为 2 mm, 5 mm, 5 mm[5], 因此 GPS 载波相位测量误差的方差取为 $\sigma_L^2 = 5.4 \times 10^{-5}\mathrm{m}^2$; 类 GPS 伪距测量误差的方差取为 $\sigma_\rho^2 = 1 \times 10^{-4}\mathrm{m}^2$. 此时方程 (11) 包括 73 个观测量、 19 个状态参数 (9 个姿态角、 6 个相对位置坐标和 4 个钟差).

编队星座各卫星的轨道根数如表 1 所示.

表 1 空间圆编队星座各卫星轨道根数

Table 1 Satellite's classical orbit elements of circular formation constellation

	a/km	e $\times 10^{-5}$	i/(°)	$\bar{\omega}$/(°)	Ω/(°)	M/(°)
卫星 1	7400.0	3.90	30.003	270.000	100.000	−180.000
卫星 2	7400.0	3.90	29.998	149.994	99.993	−59.989
卫星 3	7400.0	3.90	29.998	30.005	100.006	59.989

由于天线具体的安装方式与卫星的结构有关，为了讨论方便，在此假设卫星为边长为 1 m 的立方体. 每颗卫星上带有一套用于 GPS 测量的 4 个接收天线和一套用于类 GPS 测量的 1 个发射天线和 3 个接收天线 (假设同一颗卫星上 GPS 天线和类 GPS 天线的钟差分别相同).GPS 天线在星体坐标系中的位置矢量 $\boldsymbol{a}_i^G$ $(i = 1,2,3,4)$ 为:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1^G &= [-0.5 \quad 0.5 \quad -0.5]^{\mathrm{T}},\\
\boldsymbol{a}_2^G &= [0.5 \quad 0.5 \quad -0.5]^{\mathrm{T}},\\
\boldsymbol{a}_3^G &= [0.5 \quad -0.5 \quad -0.5]^{\mathrm{T}},\\
\boldsymbol{a}_4^G &= [-0.5 \quad -0.5 \quad -0.5]^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}$$

类 GPS 接收天线在类 GPS 天线安装坐标系中的位置矢量 $\boldsymbol{a}_i^A$ $(i = 1,2,3)$ 分别为:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1^A &= [0.5 \quad 0.5 \quad 0.5]^{\mathrm{T}},\\
\boldsymbol{a}_2^A &= [0.5 \quad 0.5 \quad -0.5]^{\mathrm{T}},\\
\boldsymbol{a}_3^A &= [0.5 \quad -0.5 \quad -0.5]^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}$$

类 GPS 发射天线在类 GPS 天线安装坐标系中的位置矢量 $\boldsymbol{t}^A = [0.5 \quad -0.5 \quad 0.5]^{\mathrm{T}}$.

3.1 整周模糊度解算结果

对于不同的数据采样周期 T, 星间 CDGPS 单差整周模糊度均方差 σ_{N0} 和参加解算的时刻数总 n 的关系如图 1 所示.

图 1 中 T 表示采样周期，由图中可知 σ_{N0} 随 n 的增大而减小，随 T 的增大而减小；但 n 和 T 的增大会带来解算时间的增加. 综合两方面考虑，选取 $T = 10\,\mathrm{s}$, $n = 15$, 则星间 CDGPS 单差整周模糊度的解算结果如表 1 所示，解算总耗时为 155.23 s, 其中包括数据采集时间 150 s 和程序运行时间 5.23 s.

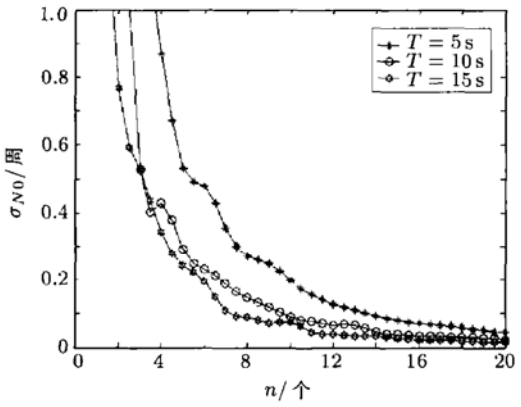


图 1 不同采样周期条件下 σ_{N0} 与 n 的关系

Fig.1 Dependence of σ_{N0} on parameter n with different T

一般在基线矢量不长 (< 15 km) 的情况下，当解算出来的模糊度实数解在真实整周模糊度的 0.1 周邻域内，则认为得到的模糊度实数解可取整作为模糊度的整数解. 由表 2 可知，星间 CDGPS 单差整周模糊度均方差 $\sigma_{N0} = 0.062$ 周，且所有模糊度的协方差 $\sigma_{Ni} < 0.1$ 周，因此可将实数解取整作为模糊度整数解.

3.2 相对位置与姿态解算结果

整周模糊度初始化完成后，可进行编队星座状态确定，结果如表 3 和表 4 所示，表 3 为星间相对位置的解算结果，表 4 为姿态角的解算结果. 星间

表 2 $T = 10\,\mathrm{s}$, $n = 15$ 的条件下星间 CDGPS 单差整周模糊度解算结果 (周)

Table 2 Results of integer ambiguity of single CDGPS intra-satellite when $T = 10\,\mathrm{s}$ and $n = 15$ (period)

模糊度	N_{12}^1	N_{12}^2	N_{12}^3	N_{12}^4	N_{12}^5	N_{13}^1	N_{13}^2	N_{13}^3	N_{13}^4	N_{13}^5
协方差	−0.032	−0.071	0.020	−0.036	0.084	−0.065	−0.057	−0.021	0.060	0.052

星间 CDGPS 单差整周模糊度均方差 $\sigma_{N0} = 0.062$

表 3 星间相对位置解算结果 (m)

Table 3 Solution results of relative positions intra-satellites (m)

	Δx_{12}^I	Δy_{12}^I	Δz_{12}^I	Δx_{13}^I	Δy_{13}^I	Δz_{13}^I
真值	−86.8283	492.0621	−865.9965	86.7226	−492.1943	−865.9965
解算值	−86.8978	492.0431	−865.9735	86.7326	−492.2143	−865.9665
协方差	0.0036	0.0029	−0.0020	0.0036	0.0028	−0.0021

表 4 卫星姿态角解算结果 (rad)

Table 4 Solution results of satellite's attitudes (rad)

	卫星 1			卫星 2			卫星 3		
	ψ_{s1}	θ_{s1}	ϕ_{s1}	ψ_{s2}	θ_{s2}	ϕ_{s2}	ψ_{s3}	θ_{s3}	ϕ_{s3}
真值	1.5707	0	0	1.5707	0	0	1.5707	0	0
解算值	1.5707	−0.007	0.003	1.5710	0.006	−0.004	1.5709	−0.003	−0.001
协方差	0.001	0.002	0.002	0.001	0.002	0.002	0.001	0.002	0.002

相对位置解算精度达厘米级，姿态角解算精度达角分级.

4 结论

本文建立了联合 CDGPS 和星间相对测量的伪距信息进行编队星座状态确定的数学模型，重点解决了星间 CDGPS 单差的整周模糊度初始化问题. 数学仿真表明模型正确有效. 本文只利用了星间相对测量的伪距信息，并未利用到其载波信息，对此将继续进行研究.

参考文献

[1] Wang Wei *et al.* Attitude and relative position estimation for formation constellation using GPS. *Chin. J. Space Sci.*, 2002, **22**(2):163—168. in Chinese (王威等. GPS 用于编队卫星星座的位置与姿态测量. 空间科学学报, 2002, **22**(2):163—168)

[2] Park C W *et al.* Sensing technologies for formation flying spacecraft in LEO using CDGPS and an inter-spacecraft communication system. ION GPS 2000, Salt Lake City, 2000, 1595—1607

[3] Axelrad P. GPS-based attitude determination. ION GPS 1997, Navtech Seminars, 1997, 564—569

[4] Knight D T. A new method for instantaneous ambiguity resolution. In: Proc. Ins. Nav. 7th Intern. Tech. Meet. Conf., Salt Lake City, 1994, 275—281

[5] Parkinson B W *et al.* Global positioning system: Theory and applications. *Prog. Astron. Aeron.*, 1996, **2**:466—468