

航天器碰撞概率简化计算方法的比较与应用*

王 宁 郭建新 周敬博

(北京控制工程研究所 北京 100094)

摘 要 针对空间飞行器碰撞概率问题, 基于碰撞概率的假设条件与计算原理, 对现有常见方法进行分析, 归纳每种方法在线性与非线性、空间目标是否规则等方面的适用性特点, 通过数值计算验证了上述方法, 并从计算速度与计算精度两个维度对每种方法进行评估。评估结果表明, 中心概率密度法的计算速度最快, 曲线积分法的相对误差最小, 基于辛普森公式的二维积分方法具有较均衡的效果, 三维体积积分适用于非线性场景, 蒙特卡洛法最为精准但是运算速度最慢。综合考虑计算精度、计算速度、相对速度、相对位置关系等因素, 根据每种方法的特点提出了多种场景下较为适用的碰撞概率简化计算方法, 研究结果可以为在轨碰撞概率的计算与分析提供参考。

关键词 碰撞概率, 协方差矩阵, 空间碎片, 非线性相对运动, 空间飞行器

中图分类号 V525

Comparison and Application of Simplified Calculation Methods for Spacecraft Collision Probability

WANG Ning GUO Jianxin ZHOU Jingbo

(Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100094)

Abstract With the rapid increase in the number of debris and spacecraft in space, spacecraft need to assess collision risks in real time. However, due to the limited on-board software and hardware resources, there is an urgent need for a collision probability calculation method with appropriate computational load and high assessment accuracy. Aiming at the problem of spacecraft collision probability, this paper firstly explains the assumptions and calculation principles of collision probability, then summarizes and analyzes the existing common methods, summarizes the applicability and characteristics of each method in terms of linearity and nonlinearity, whether the space target is regular, etc., and finally verifies the adaptability of the above methods through numerical calculation, and evaluates each method from the two dimensions of calculation speed and calculation accuracy. The evaluation results show that the central probability density method has the fastest calculation speed. The relative error of the curve integration method is the smallest, the two-dimensional integration method based on Simpson's formula has a relatively balanced effect. 3D volume integration is suitable for nonlinear scenes, the Monte Carlo method is the most accurate, but the slowest. Considering the factors such as calculation accuracy, cal-

* 国家自然科学基金项目资助 (62203046)

2024-03-07 收到原稿, 2024-04-19 收到修定稿

culation speed, relative velocity, and relative position relationship, this paper proposes a simplified calculation method for collision probability in various scenarios according to the characteristics of each method, and the research results can provide a reference for the calculation and analysis of on-orbit collision probability.

Key words Collision probability, Covariance matrix, Space debris, Nonlinear relative motion, Space vehicles

0 引言

随着空间活动的增加, 巨型商业星座不断涌现^[1], 空间碎片与航天器数目迅速增加, 使得航天器的正常运行受到了极大威胁. 由于空间碎片分布的密集区域正是常用的航天器轨道区域, 而且碎片与目标航天器的相对平均速度可以达到 $10 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, 一旦发生碰撞, 后果严重, 影响巨大^[2]. 对于空间中尺寸小于 1 cm 的碎片, 可以通过外部屏蔽的方法来保护航天器, 但是对于尺寸大于 1 cm 的碎片, 只能通过空间规避的方法来避免碰撞. 因此, 对碰撞安全问题的研究是亟需进行的.

早期航天器主要采用 BOX 区域方法^[3], 这种方法通过基于双方的相对距离大小判断是否进入危险区, 来判断航天器碰撞的风险. 此方法虽然较为直观简单, 但是由于仅仅以区域划分作为判断标准, 一方面无法给出具体的解析式来定量判断威胁程度大小, 不利于得到航天器的最优规避策略; 另一方面, 这种方法大多数情况下过于保守, 容易造成大量虚警及不必要的机动.

为了解决上述问题, 国际上普遍采用基于碰撞概率的计算方法作为碰撞预警的精确计算方法^[4], 这种方法通过考虑两个航天器的相对位置、速度关系以及三维位置误差协方差阵, 讨论三维概率分布, 得到碰撞概率较为精准的计算方法. 但是这种方法计算量较大, 在空间碎片较多的情况下, 不利于快速评估碰撞风险, 因此很多学者提出了碰撞概率简化计算方法.

Bai 等^[5]在两者相遇时刻为匀速直线运动的线性假设下, 通过将碰撞概率计算方法进行简化处理, 提出了碰撞概率一重积分计算方法, 化空间三维积分为一重积分, 大大提高了计算效率; 随后 Bai 等^[6]又提出了空间碰撞概率级数计算方法, 能够通过选取级数前任意有限项的和作为碰撞概率的近似, 并给出了截断误差上限表达式. Dong 等^[7]在此基础上提出了等效矩形域法计算碰撞概率, 该方法具有较高的精度

和较好的估计误差稳定性, 但适用性不高. Xing^[8]在计算碰撞概率的基础上, 利用遗传算法对 GEO 卫星空间规避策略进行了研究. Lei^[9]通过设计深度神经网络, 得到了一种碰撞概率算法, 但是需要大量的训练与调参. Cao^[10]研究了近距离悬停时碰撞概率的计算方法. Xing 等^[11]通过分析未来某一时刻两物体距离达到最近时的碰撞概率, 用于指导航天器对碎片的自主规避.

为了提高对于形状不规则物体的计算精度, Patera^[12]通过旋转压缩等方法, 将其转化为了环路积分计算方法, 在绳系卫星上得到了验证.

上述方法均在线性假设下完成. 针对非线性碰撞问题, McKinley^[13]提出了三维积分计算方法, 通过拼接积分区域的方法, 得到较为精准的计算结果, 但是计算过程比较复杂. Yang 等^[14]总结了碰撞概率计算方法研究进展、存在的问题及发展方向, 具有一定指导意义, 但是没有从方法适用性角度比较各种方法对于航天器碰撞概率计算的影响.

除此之外, 针对星链等巨型星座, Zhang 等^[15]分析了不同阶段星链卫星对其他卫星的碰撞威胁情况, 研究了针对星链卫星的碰撞预警策略. Ren^[16]以星链星座为研究对象, 通过计算碰撞概率给出了单颗卫星的星座总体的碰撞风险评估参数.

本文从三维误差概率分布出发, 通过对已有多种方法进行总结, 并分析其优缺点及适用性, 在此基础上得到多种场景下的碰撞概率简化计算方法选取建议, 可用于支撑在轨多种工况下碰撞风险评估.

1 碰撞概率计算原理

1.1 碰撞概率描述

对于空间中运动的两个物体, 已知双方相遇之前某时刻其在惯性系下的位置、速度矢量, 并将其作为标称位置、速度矢量. 假设两个目标在惯性系下的位

置不确定性分别服从三维高斯分布, 采用误差分布中心与误差协方差来对两个物体的位置进行描述, 两个目标的位置分布以其标称位置为误差分布中心, 呈三维高斯分布. 假定双方的误差分布不相关, 则双方的相对位置误差就等于各自的位置误差之和. 求和后得到的三维相对位置误差分布就形成了一个联合误差椭球.

假设将双方等效为半径已知的球体, 当两个目标误差分布中心的相对距离小于双方等效球体半径之和时, 两物体发生碰撞, 则碰撞概率等效为双方最小相对距离小于双方半径和的概率. 如图 1 所示, 图 1 中的虚线圆为联合球体, 由两目标的等效半径相加得到, 球心为航天器 B 的分布中心. 联合误差椭球球心为航天器 A, 则碰撞概率为联合球体在联合误差椭球空间内扫过体积的概率密度积分.

基于上述原理, 碰撞概率计算式为

$$P = \frac{\iiint_V \frac{1}{(2\pi)^{3/2} |C_i|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{X}_e^T C_i^{-1} \mathbf{X}_e\right) dV}{V} \quad (1)$$

式中, V 为联合球体在联合误差椭球内扫过的体积; C_i 为相对位置误差分布的协方差矩阵; $\mathbf{X}_e$ 为二者的相对位置. 由此可见, 影响碰撞概率大小的因素有联合球体的大小、相对位置误差分布协方差矩阵和二者的相对位置矢量.

1.2 碰撞概率计算假设条件

式 (1) 为三维空间全积分形式, 当两个航天器异轨飞行且相距较近时, 一般相遇速度较快, 可以有以下假设.

(1) 假设在相遇期间两者为匀速直线运动, 没有

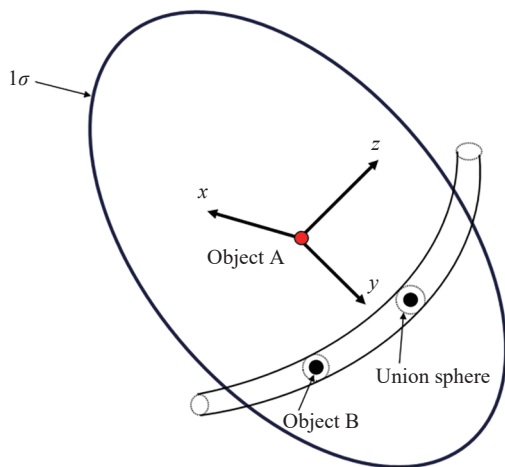


图 1 相对运动

Fig. 1 Relative motion

速度不确定性.

(2) 假设两者的位置误差分布不相关, 均服从三维高斯分布.

(3) 假设两目标可以等效为球体.

当上述假设成立时, 如图 2 所示航天器 B 在穿越航天器 A 的联合误差椭球时, 停留时间较短, 可以将其扫过的体积等效为一个圆柱体.

对于这种线性相对运动, 可以将三维圆柱体体积积分等效为二维平面内的投影面积积分问题. 文献 [5] 证明了在相对运动线性的假设下, 在最接近时刻二者的相对位置方向与相对速度方向相互垂直, 并由此可以定义相遇坐标系. Chan^[17] 进一步定义了相遇平面, 将三维碰撞概率计算化为相遇平面内的二维积分问题, 简化了积分过程.

当两个航天器同轨、顺行运动时, 大多不满足相遇速度较快的前提条件, 无法投影到二维平面, 线性假设不再适用, 此时应选取式 (1) 中非线性碰撞概率计算方法. 与线性碰撞概率不同, 非线性碰撞概率计算方法的积分域一般为截面积可变的空管状, 存在积分体积大小与形状难以描述的问题, 因此大多数情况下只能进行空间体积积分数值计算. 此方法虽然具有较高的精确性, 但是也带来了计算速度较低的问题. 除此之外, 当航天器之间相对距离很小 (100 m) 时, 仍建议结合最小安全距离进行风险评估^[17].

2 碰撞概率计算模型

对 10 种碰撞概率简化计算方法与原理分别进行分析, 并得出其优缺点及适用条件.

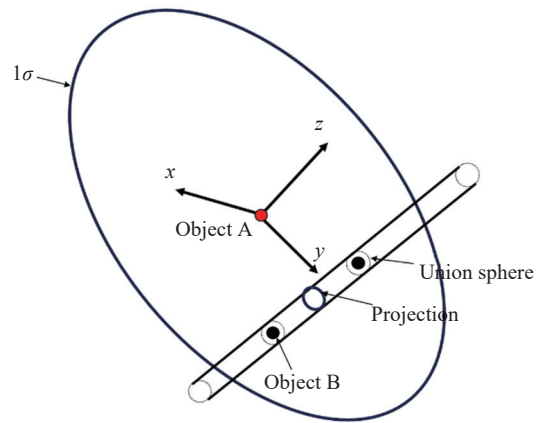


图 2 线性相对运动

Fig. 2 Linear relative motion

2.1 三维非线性碰撞概率计算方法

在线性相对运动假设中, 由于假设两个航天器相对速度较大, 因此可以将积分体积近似为圆柱体后投影到相遇平面进行简化计算, 但是实际情况中存在相对速度较小的复杂绕飞场景. 研究表明, 当相对速度在 $100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 以下时, 线性简化相对误差超过 5%^[18], 因此在一些相对速度过低的情形下, 应采用三维体积积分. 下面主要分析两种计算三维非线性碰撞概率计算方法.

2.1.1 体积拼接积分法

Mckiney^[13] 采用了三维体积拼接积分的方法, 将整个空间体积分为若干个小直柱体, 如图 3 所示. 设 i 时刻惯性系下航天器 B 到航天器 A 的相对位置矢量为 $\mathbf{R}_{\text{REL}_i}$, 同理 $i+1$ 时刻的相对位置矢量为 $\mathbf{R}_{\text{REL}_{i+1}}$, $i+2$ 时刻的相对位置矢量为 $\mathbf{R}_{\text{REL}_{i+2}}$. 定义局部积分坐标系 $O - V_i N_i B_i$ 如下:

$$\mathbf{V}_i = (\mathbf{R}_{\text{REL}_{i+1}} - \mathbf{R}_{\text{REL}_i}) / \|\mathbf{R}_{\text{REL}_{i+1}} - \mathbf{R}_{\text{REL}_i}\|, \quad (2)$$

$$\mathbf{N}_i = (\mathbf{R}_{\text{REL}_{i+1}} \times \mathbf{R}_{\text{REL}_i}) / \|\mathbf{R}_{\text{REL}_{i+1}} \times \mathbf{R}_{\text{REL}_i}\|, \quad (3)$$

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{V}_i \times \mathbf{N}_i. \quad (4)$$

通过在每个小直柱体上建立当前积分时刻的积分坐标系, 利用小直柱体之间的几何关系确定 V 轴积分上下限, 从而避免了体积重叠与空隙问题.

计算每个小直柱体的碰撞概率三维体积积分, 并将所有小直柱体的积分值相加得到整个接近过程中的碰撞概率.

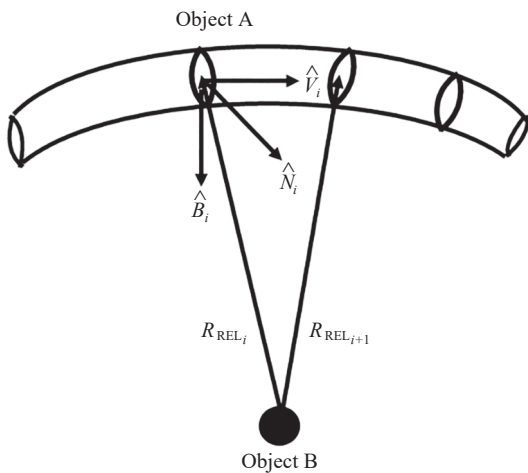


图 3 积分坐标系

Fig. 3 Integral coordinate system

2.1.2 圆环等效法

Chan^[19] 假设两个空间物体相对关系满足 Hill 方程且三轴均方误差均相同、相对运动为共面运动等, 通过等效面积法将空间积分体积等效为运动平面内的二维圆环, 得到如下碰撞概率一阶近似计算方法:

$$P_{\text{ch}} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(R_0^2 + r_0^2)}{2\sigma^2} \right] \int_0^{r_0} \sinh \left(\frac{R_0 \sqrt{r_0^2 - x^2}}{\sigma^2} \right) dx. \quad (5)$$

其中, R_0 为环面的半径, r_0 为其横截面的半径, σ 为三轴位置误差标准差, $\sinh$ 为双曲正弦函数. 与 2.1.1 节中方法不同, 该方法为垂直于运动平面方向进行体积分割. 由于该方法为基于 Hill 方程推导, 且假设条件较多, 不做具体讨论.

2.2 二维线性碰撞概率计算方法

对于相对速度较大的情形, 在相对距离最小时, 相对速度与相对位置矢量相互垂直, 与相对速度垂直的二维平面称相遇平面, 此时原联合误差椭圆投影得到联合误差椭圆, 原联合球体投影得到积分圆域.

在相遇平面中定义相遇坐标系 Oxy , 其中原点 O 位于航天器 A 的分布中心, Ox 轴指向联合误差椭圆的长半轴, Oy 轴指向短半轴. 由于相遇时速度较大, 且相对速度与相对位置矢量相互垂直, 因此三维积分计算方法中的立体积分区域可以投影到相遇平面中, 在相遇坐标系 Oxy 下, 通过简化计算问题节省计算时间.

2.2.1 二维面积积分法

由 2.2 节可得, 将相对速度较大情形下三维圆柱体投影到相遇平面 Oxy 平面中, 如图 4 所示.

从图 4 可以看出, 投影之后, 三维碰撞概率计算变为 Oxy 平面内相遇坐标系下的二维碰撞概率计算. 其积分计算如下式:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} \right) \right], \quad (6)$$

$$P_{\text{en}} = \iint_{(x-\mu_x)^2 + (y-\mu_y)^2 \leq R^2} f(x, y) dx dy. \quad (7)$$

其中, σ_x 和 σ_y 分别为航天器 A 与 B 的距离误差中 x 轴和 y 轴的标准差, μ_x 和 μ_y 分别为航天器 B 投影的中心位置的横纵坐标, R 为联合球体半径, $f(x, y)$ 为二维概率密度函数. 通过计算叠加在航天器 B 上的联合球体的投影部分的概率密度积分得到二维平面中

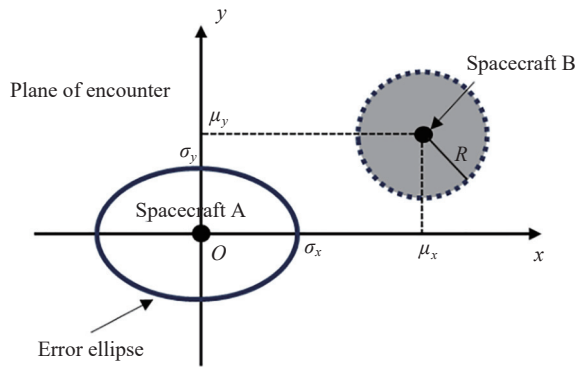


图4 二维平面

Fig. 4 Two-dimensional planar schematic

的碰撞概率.

2.2.2 中心概率密度面积法

由于 2.2.1 方法中存在二重积分, 使得计算碰撞概率时速度较慢, 因此对于精度要求不高、计算速度要求高的场景, 可以采用中心概率密度法. 即认为航天器 B 的投影区域概率密度相等, 均等于中心点的碰撞概率密度, 这样碰撞概率就可以通过航天器 B 的投影面积乘以中心概率密度求得, 有

$$P_c = \pi R^2 f(\mu_x, \mu_y). \quad (8)$$

式中, R 为联合球体半径, $f(\mu_x, \mu_y)$ 为二维概率密度函数. 由简化原理及概率知识可得, 对于同样的等效半径球体投影, 这种简化在航天器 A 和 B 之间的距离远大于 σ_x 和 σ_y 时, 误差较小.

2.2.3 一重积分法

为了兼顾速度与精度, Bai 等^[5]通过定义相遇坐标系与积分坐标系, 通过坐标转换关系将位置误差协方差投影到相遇坐标系中, 旋转相遇坐标系后得到积分计算坐标系, 将计算碰撞概率的问题转化为二维概率密度函数在圆域内的积分问题.

通过压缩空间的方法, 将不等方差概率密度函数在圆域内的积分化为等方差概率密度函数在椭圆域内的积分, 然后通过极坐标变换将二重积分化为一重积分形式的概率表达式, 其计算表达式如下:

$$P_o = \int_0^{2\pi} I(\theta) d\theta. \quad (9)$$

其中, $I(\theta)$ 为关于 θ 的多项式, θ 为极坐标下积分角度.

2.2.4 级数法

在 2.2.3 节所述等方差概率密度函数在椭圆域内

的积分基础上, 将其进一步简化为等方差概率密度函数在圆域内的积分, 随后对圆域内的积分式进行了化简, 并使用级数进行表示, 这样可以通过选取级数 P_k 的项数 k 来得到相对应的碰撞概率计算结果, 平衡计算量和计算精度, 其计算方法如下:

$$P_b = P_0 + P_1 + \dots + P_k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} P_k, \quad (10)$$

$$P_k = \int_0^R \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 + \mu_r^2}{2\sigma^2}\right) I_0^{(k)} dr. \quad (11)$$

其中, R_k 为第 k 项级数, r 为圆域半径, μ_r 为圆域中心到坐标原点的距离, σ 为误差标准差, I_0 为第 1 类零阶修正 Bessel 函数.

2.2.5 矩形域近似法

基于等效圆域法思想, Dong 等^[7]通过将碰撞概率积分区域等效为面积相等的矩形, 并经过拆分 x 轴与 y 轴的积分, 得到如下更为简化的方法:

$$P_M = \left[\Phi\left(\frac{\mu_x + l/2}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_x - l/2}{\sigma_x}\right) \right] \cdot \left[\Phi\left(\frac{\mu_y + l/2}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_y - l/2}{\sigma_y}\right) \right]. \quad (12)$$

式中, $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, l 为等效矩形的边长, σ_x 和 σ_y 分别为航天器 A 与 B 的距离误差中 x 轴与 y 轴的标准差, μ_x 和 μ_y 分别为航天器 B 投影的中心位置的横纵坐标. 根据式 (12) 可以直接通过查标准正态分布表进行简单运算得到碰撞概率值, 这样可以大大缩短运算时间.

2.2.6 曲线积分法

以上的方法均将两个航天器的大小等效为球体, 并最终得到联合球体附加在航天器 B 上. 对于一些情况, 例如绳系卫星、形状细长的空间碎片或空间站, 这种等效过于简单. 如图 5 所示, 考虑航天器 B 的形状以及姿态, 其投影为一个不规则形状, 这是由于航天器的自身形状不规则以及姿态不确定, 使得投影形状不规则, 进而带来积分不便的问题.

如图 5 所示, Patera^[12]将二维面积积分转化为一维曲线积分, 通过这种方法可以对任意形状的空间物体进行碰撞概率计算, 从而在形状等效上更为精准, 计算碰撞概率更为精准. 其计算式如下:

$$P_n = -\frac{1}{2\pi} \oint_l \exp(-\alpha r^2) d\theta, \quad (13)$$

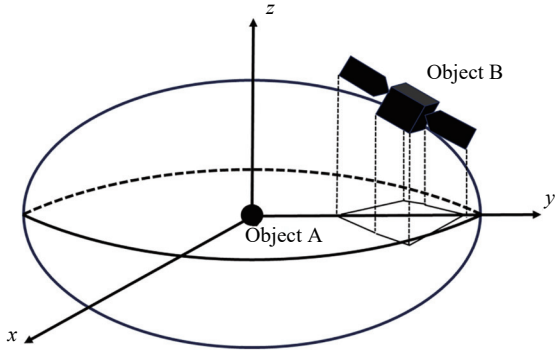


图 5 投影区域不包含原点

Fig. 5 Projection region does not contain the origin

式 (13) 为投影区域不包含原点的计算方法, 式中 α 为坐标变换中的过程量, r 和 θ 分别为极坐标系下投影点到原点的距离以及角度.

如图 6 所示, 若投影区域包含原点, 则应使用

$$P_i = 1 - \frac{1}{2\pi} \oint_l \exp(-\alpha r^2) d\theta \quad (14)$$

进行计算.

2.2.7 基于辛普森公式的二维积分方法

Alfano 等^[20] 通过使用 Simpson 公式 1/3 法则及 erf 误差函数, 将碰撞概率最终化为 m 项级数, 当距离误差标准差 σ_x 与 σ_y 的比例从 1 增大到 500 时, 计算结果都精确到了两个以上的有效数字, 实现了较广泛的参数范围内的较高精度, 适用性较好, 计算公式如下:

$$P_A = \frac{dx}{3\sqrt{8\pi}\sigma_x} (m_0 + m_{\text{even}} + m_{\text{odd}}). \quad (15)$$

其中, m_0 为首项, m_{even} 为偶数项, m_{odd} 为奇数项, σ_x 为 x 轴的误差标准差.

2.3 蒙特卡洛方法

2.3.1 二维蒙特卡洛法

对于可以进行线性简化的碰撞概率计算, 可以使用二维平面内的蒙特卡洛法, 在相遇平面内随机给出符合误差分布的航天器 B 所在的位置, 通过统计航天器 A 与 B 之间的距离与二者联合半径做比较, 如果距离小于联合半径, 则认定为发生碰撞, 如果大于, 则认为没有发生碰撞.

2.3.2 三维蒙特卡洛法

对于非线性相对运动情况来说, 可以计算三维平面内的蒙特卡洛碰撞概率, 与二维类似, 随机给出符

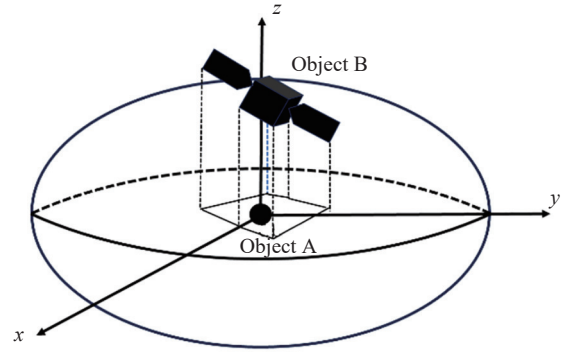


图 6 投影区域包含原点

Fig. 6 Projection region contain the origin

合误差分布的航天器 B 所在三维空间中的位置, 通过统计航天器 A 与 B 之间的距离与二者联合半径做比较, 得到最终碰撞概率. 与二维蒙特卡洛法在简化相遇平面内给出航天器 B 所在的位置相比, 三维蒙特卡洛法在三维空间中给出航天器 B 所在的位置, 考虑了相对距离最近时, 三维空间中相对速度轴 z 轴的误差分布, 在带来更准确的结果的同时也带来了更大的运算量.

蒙特卡洛法由于直接采用误差分布统计意义上的数值生成航天器的可能位置, 并进行轨道预报与碰撞判断, 具有最接近真实性的优点. 但是其计算速度慢的缺点十分明显, 难以用于实时计算.

3 比较分析

3.1 满足线性相对运动条件的比较分析

选取曾经真实发生过的碰撞事件案例用于碰撞评估验证: 2005 年 1 月 17 日, 中美空间碎片在轨发生碰撞, 当天 02:14:37.00 UTC 时刻双方的位置速度如表 1 所示. 经过计算, 表 1 中两个航天器相遇速度为 $5.7 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, 可以将此场景碰撞概率计算投影到二维平面. 通过给出两个航天器在惯性系下某一时刻的位置速度、等效半径以及在 UNW 坐标系下的三轴位置误差均方差, 可以将其代入上述十种方法进行计算. 其中 U 轴为速度方向, N 轴为轨道面径向方向, W 轴为轨道面法线负方向. 仿真所用的计算机配置为 i7-13700 HX 处理器, 16 G 内存.

航天器 A 和 B 的联合球体半径为 10 m, 位置误差分布 σ_{u1} 和 σ_{u2} 均为 0.265 km, σ_{n1} 和 σ_{n2} 均为 0.053 km, σ_{w1} 和 σ_{w2} 均为 0.053 km.

表 1 两个航天器在 J2000 惯性系下的初始位置速度
Table 1 Initial position velocity of two spacecraft in an inertial frame of J2000

Object	x/km	y/km	z/km
A	-150.798437	1182.676987	-7143.77556
B	-150.619960	1182.018386	-7143.78799
Object	$v_x / (\text{km}\cdot\text{s}^{-1})$	$v_y / (\text{km}\cdot\text{s}^{-1})$	$v_z / (\text{km}\cdot\text{s}^{-1})$
A	7.290071	-1.126282	-0.354014
B	5.915107	4.347936	0.643388

3.1.1 体积拼接积分法

首先使用体积拼接积分法计算, 结果如图 7 所示. 从图 7 中可以看出, 随着时间的增加, 从第 0.05 s 开始, 对体积进行积分, 碰撞概率陡增. 到第 0.2 s, 联合球体离开误差椭球, 碰撞概率值保持不变. 最终求得的碰撞概率为 7.06692×10^{-4} , 计算所用时间为 8.7762 s.

体积拼接积分法由于未进行简化投影, 计算精准度最高, 但是计算速度较慢, 因此不适用于相对距离较远的计算, 适用于相对距离与速度较小时, 对精确度要求高的计算情景, 例如大多数同轨碰撞概率计算.

3.1.2 二维碰撞概率计算方法

由于表 1 中两个航天器相对速度较大, 因此可以对此场景进行二维简化, 进行计算得到结果列于表 2.

表 2 中列举了 7 种二维碰撞概率计算方法, 并将 6 种简化计算方法与二维面积积分法做比较. 总体来说, 各种方法误差率均在 0.5% 以内, 辛普森公式积分法比其余几个方法的运算速度快 1 到 2 个数量级, 仅次于中心概率密度面积法.

辛普森公式积分法兼顾了较小的误差与较高的运算速度, 更适用于异轨或非合作目标相遇情形. 如果需要较快的计算速度, 例如需要对多目标进行碰撞概率计算时, 可以选取中心概率密度法, 也可以保证一定的精度; 如果需要较高的精度, 例如对于合作目标, 可以得知双方的姿态与形状大小, 则可以选取曲线积分法. 当航天器或碎片形状不能等效成球形时, 例如计算与空间站的碰撞概率时, 也应当采用曲线积分法.

3.1.3 蒙特卡洛方法

由表 3 可知, 蒙特卡洛法使用了大规模的随机计算, 导致运算时间过长, 即使对于三维积分算法, 蒙特卡洛法也是其计算时间的几百倍甚至上千倍. 通过对比二维、三维蒙特卡洛法可见, 三维蒙特卡洛增加了一个维度, 即使运算次数只有 10^6 量级, 计算时间也

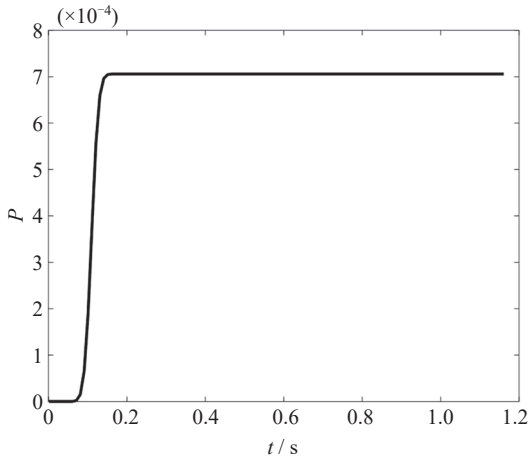


图 7 三维积分计算结果
Fig. 7 Three-dimensional integral calculation results

表 2 二维碰撞概率计算结果
Table 2 Calculation results of two-dimensional collision probability

方法	碰撞概率	相对误差率	计算时间/s
二维面积积分法	7.066×10^{-4}	—	0.1097
中心概率密度面积法	7.051×10^{-4}	0.0021	0.0064
一重积分法	7.066×10^{-4}	8.9×10^{-14}	0.1259
级数法	7.051×10^{-4}	0.0021	0.0126
矩形域近似法	7.067×10^{-4}	1.00×10^{-4}	0.0392
曲线积分法	7.066×10^{-4}	5.3×10^{-15}	0.1097
辛普森公式积分法	7.066×10^{-4}	5.64×10^{-6}	0.0074

增长了一个量级, 不适用于星上自主计算碰撞概率, 仅适用于高精度计算.

3.2 碰撞概率计算方法误差影响因素分析

3.2.1 相对位置误差协方差对碰撞概率计算的影响

以表 1 中位置速度初始条件作为仿真初始条件,

表 3 蒙特卡罗方法计算结果
Table 3 Calculation results by Monte Carlo method

方法	碰撞概率	运算次数/次	计算时间/s
二维蒙特卡洛法	7.068×10^{-4}	1×10^{10}	1224.6
三维蒙特卡洛法	7.076×10^{-4}	5×10^6	67180.4

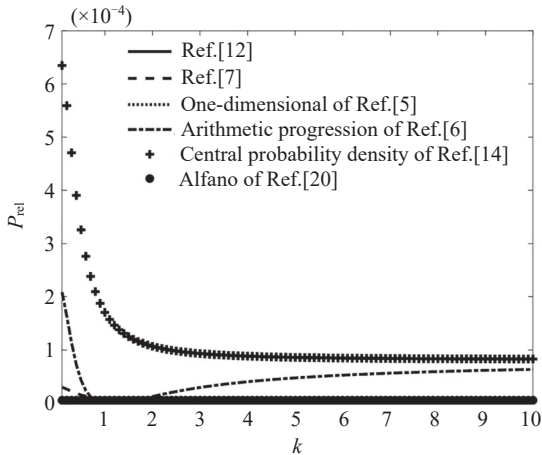


图 8 相对误差率随位置误差的变化
Fig. 8 Variations of relative error rate with position error

对 U 轴的相对位置误差协方差乘以比例 k , 这里 k 的范围为 0.1 到 10, 其余条件不变, 得到相对误差率 P_{rel} 结果如图 8 所示。

结果表明所有方法对于误差协方差的大小均保持了较好的精度, 中心概率密度法与级数法的相对误差率最大, 在 10^{-4} 次方量级。

3.2.2 两目标的等效半径对碰撞概率计算的影响

以表 1 中位置速度初始条件作为仿真初始条件, 对等效半径乘以比例 k , 这里 k 的范围为 0.1~10, 其余条件不变, 得到相对误差率 P_{rel} 结果如图 9 所示。

结果表明中心概率密度法与级数法对于等效半径过于敏感, 不适合计算联合球体半径较大的情况, 其余所有方法对于误差协方差的大小均保持了较好的精度。

4 结论

航天器碰撞概率的计算主要由相对位置、相对位置误差、二者等效半径决定。通过对 10 种碰撞概率方法进行验证并进行对比, 得到不同应用情形下的建议使用方法 (见表 4)。

同轨时, 一般相对速度较小, 投影简化为二维误

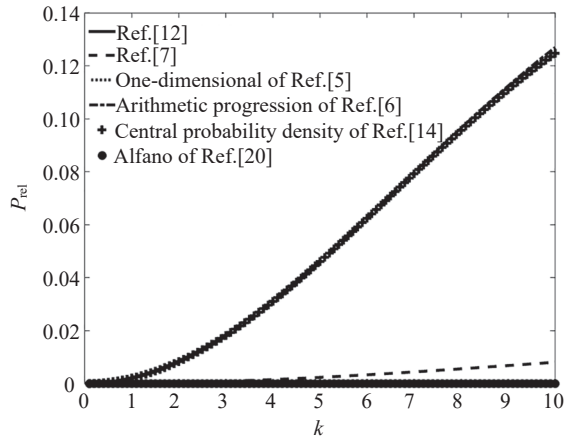


图 9 相对误差率随等效半径的变化
Fig. 9 Variations of relative error rate with equivalent radius

表 4 不同应用情形下碰撞概率工程适用方法
Table 4 Calculation method applicable to the collision probability under different circumstances

相遇情形	方法
同轨	体积拼接积分法
异轨	辛普森公式积分法
多目标碰撞概率计算	中心概率密度面积法
编队绕飞	体积拼接积分法、曲线积分法
合作目标	曲线积分法
非合作目标	辛普森公式积分法
高精度计算	蒙特卡洛法、体积拼接积分法

差较大, 此时体积拼接积分法较为适用。对于异轨情形或非合作目标接近时, 由于相对速度较大, 因此应同时考虑准确性与计算速度, 建议采用辛普森公式积分法。对于多目标碰撞概率情形, 由于需要同时计算多个目标, 大大增加了运算量, 建议采取中心概率密度面积法, 以保证在计算结果可信的同时, 计算速度最快。对于合作目标, 由于可以获取位置姿态信息, 应采取曲线积分法, 可以在计算中引入姿态信息使得积分区域更真实, 准确度相较其他方法更高。对于高精度计算情形, 可以采取蒙特卡洛法、体积拼接积分法, 使用较长的计算时间得到最真实的结果。

通过对以上 10 种方法的总结, 得到不同应用情形下碰撞概率适用的计算方法, 可作为碰撞概率工程上应用时的方法指导。

参考文献

- [1] FENG Hao, TIAN Baiyi, ZHANG Xiangyu. Analysis on influence of giant commercial constellations on orbit resources[J]. *Space Debris Research*, 2021, **21**(2): 40-45 (冯昊, 田百义, 张相宇. 巨型商业星座发展对轨道资源影响探索[J]. 空间碎片研究, 2021, **21**(2): 40-45)
- [2] CHENG Tao, LIU Jing, WANG Ronglan, *et al.* Collision probability analysis and application of cataloged space debris[J]. *Chin. J. Space Sci.*, 2006, **26**(6): 452-458 (程陶, 刘静, 王荣兰, 等. 空间碎片预警中的碰撞概率方法研究[J]. 空间科学学报, 2006, **26**(6): 452-458)
- [3] LELEUX D, SPENCER R, ZIMMERMAN P, *et al.* Probability-based space shuttle collision avoidance[C]// SpaceOps 2002 Conference. Houston: AIAA, 2002
- [4] WANG Jihe, ZHANG Jinxiu, CAO Xibin. Survey of autonomous safety operation and control for distributed satellite system[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2009, **41**(5): 1-5 (王继河, 张锦绣, 曹喜滨. 分布式卫星系统自主安全管理与控制研究综述[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2009, **41**(5): 1-5)
- [5] BAI Xianzong, CHEN Lei. Research on Computational method of collision probability between space objects[J]. *Journal of Astronautics*, 2008, **29**(4): 1435-1442, 1456 (白显宗, 陈磊. 空间目标碰撞概率计算方法研究[J]. 宇航学报, 2008, **29**(4): 1435-1442, 1456)
- [6] BAI Xianzong, CHEN Lei. A rapid algorithm of space debris collision probability based on space compression and infinite series[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2009, **32**(2): 336-353 (白显宗, 陈磊. 基于空间压缩和无穷级数的空间碎片碰撞概率快速算法[J]. 应用数学学报, 2009, **32**(2): 336-353)
- [7] DONG Wenpu, REN Leisheng, ZHOU Hao, *et al.* Rapid algorithm of space objects collision probability with equivalent rectangular area[J]. *Journal of Astronautics*, 2020, **41**(12): 1594-1600 (董文朴, 任磊生, 周浩, 等. 空间目标碰撞概率的等效矩形域快速算法[J]. 宇航学报, 2020, **41**(12): 1594-1600)
- [8] XING Yao. Research on GEO Spatial Situation and Collision Avoidance Visualization[D]. Taiyuan: North University of China, 2023 (邢尧. GEO 空间态势及碰撞规避可视化研究[D]. 太原: 中北大学, 2023)
- [9] LEI Qiwei. Orbit Prediction and Collision Probability Calculation Method of Space Station Based on Intelligent Algorithm[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2022
- [10] CAO Yi. Research on Energy Analysis and Control Method of Non-Cooperative Target Hovering[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2021
- [11] XING Linfeng, LI Kehang, XUE Chao. Autonomous space debris avoidance method[J]. *Space Debris Research*, 2023, **23**(1): 19-23 (邢林峰, 李克行, 薛超. 空间碎片自主规避方法[J]. 空间碎片研究, 2023, **23**(1): 19-23)
- [12] PATERA R P. Method for calculating collision probability between a satellite and a space tether[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2002, **25**(5): 940-945
- [13] MCKINLEY D. Development of a nonlinear probability of collision tool for the earth observing system[C]// AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit. Keystone: AIAA, 2006
- [14] YANG Weiwei, ZHAO Yong, CHEN Xiaoqian, *et al.* Progress in calculation methods for collision probability of spacecraft[J]. *Chinese Space Science and Technology*, 2012, **32**(6): 8-15 (杨维维, 赵勇, 陈小前, 等. 航天器碰撞概率计算方法研究进展[J]. 中国空间科学技术, 2012, **32**(6): 8-15)
- [15] ZHANG Wei, ZHANG Rongzhi, WANG Xiuhong, *et al.* Analysis of collision threat and collision detection strategy of starlink constellation[J]. *Manned Spaceflight*, 2022, **28**(5): 606-612 (张炜, 张荣之, 王秀红, 等. 星链卫星碰撞威胁及预警策略研究[J]. 载人航天, 2022, **28**(5): 606-612)
- [16] REN Shuyi. Orbital Evolution Analysis and Collision Risk Assessment for LEO Satellite Constellation[D]. Beijing: National Space Science Center, Chinese Academy of Sciences, 2022
- [17] CHAN K. Collision probability analyses for earth orbiting satellites[J]. *Advances in the Astronautical Sciences*, 1997, **96**: 1033-1048
- [18] XU Xiaoli, XIONG Yongqing. A research on collision probability calculation of space debris for nonlinear relative motion[J]. *Acta Astronomica Sinica*, 2011, **52**(1): 73-85 (许晓丽, 熊永清. 非线性相对运动下空间碎片碰撞概率计算的研究[J]. 天文学报, 2011, **52**(1): 73-85)
- [19] CHAN F K. Short-Term vs. Long-Term Spacecraft Encounters [C]//AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit. Providence: AIAA, 2004
- [20] AKELLA M R, ALFRIEND K T. Probability of collision between space objects[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2000, **23**(5): 769-772

作者简介



王宁 男, 2000 年 3 月出生于山西省运城市. 现为北京控制工程研究所硕士研究生, 主要研究方向为航天器空间规避策略.

E-mail: wnqwert123@163.com



郭建新 (通信作者) 男, 1978 年出生于江西省. 现为北京控制工程研究所研究员, 硕士生导师, 主要研究方向为卫星自主导航与轨道控制.

E-mail: gjxwanquan@163.com